Álgebra Homológica

Álgebras de Koszul 1

1. Sea $A = k_q[x, y] = k\langle x, y|xy = qyx\rangle$, o sea $V = kx \oplus ky$, $R = k(x \otimes y - qy \otimes x)$.
   (a) Consideramos $X, Y \in V^*$ la base dual de $\{x, y\}$. Muestre que R^0 está generado por $\{X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y + q^{-1}Y \otimes X\}$ y que por lo tanto
   $$A^! = k\langle X, Y|X^2 = 0 = Y^2, XY = q^{-1}YX\rangle$$
   $A^!$ tiene dimensión finita (4) y su componente de grado máximo es 2, por lo tanto el complejo de Koszul de A tiene longitud 2.
   (b) Usando que $k_q[x, y]$ es libre sobre k con base los monomios ordenados $\{x^i y^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$, muestre que el complejo de Koszul
   $$0 \to k_q[x, y] \otimes (x \otimes y - qy \otimes x) \to A \otimes x \oplus A \otimes y \to A \to k \to 0$$
   es exacto, y por lo tanto $k_q[x, y]$ es un álgebra de Koszul.
   (c) Calcule $\mathrm{Tor}^A_n(k, k)$ y $\mathrm{Ext}^n_A(k, k)$

2. Para las siguientes álgebras, Calcule $A^!$. Calcule las dimensiones de $A^!_2$ y $A^!_3$. Escriba explícitamente el complejo de Koszul hasta grado 3:
   $$A \otimes R_3 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$
   (a) $A = k\langle x, y\rangle/(xy, yx)$.
   (b) $A = k\langle x, y\rangle/(x^2 = y^2, xy = yx)$.
   (c) $A = k\langle x, y\rangle/(x^2, yx)$ (ésta no es Koszul!).

3. Sea $A = TV/(R)$, llamemos $R(A) = \bigoplus_n R_n$. Observemos que el diferencial
   $$d_A : A \otimes R_n \to A \otimes R_{n-1}$$
   es homogeneo de grado cero si consideramos el grado total en $A \otimes R_n$, o sea,
   $$d_A| : A_p \otimes R_n \to A_{p+1} \otimes R_{n-1}$$
   Usando que $R^*_n = A^!_n$ y que $A^*_n = R_n(A^!)$ (identificando V con V^{**}), muestre que la traspuesta da el diferencial de $A^!$ cuando se hace el complejo de Koszul a derecha, más precisamente
   $$\begin{array}{ccc} A^*_{p+1} \otimes R^*_{n-1} & \xrightarrow{(d_A|)^*} & A^*_p \otimes R^*_{n-1} \\ \| & & \| \\ R(A^!)_{p+1} \otimes A^!_{n-1} & \xrightarrow{d_{A^!}} & R(A^!)_p \otimes A^!_n \end{array}$$
   concluya que $A \otimes R_\bullet(A)$ es una resolución de k como A-módulo a izquierda si y sólo si $R_\bullet(A^!) \otimes A^!$ e suna resolución de k como $A^!$-módulo a derecha y por lo tanto A es Koszul (a izquierda) si y sólo si $A^!$ es Koszul (a derecha).
   (Veremos luego que A es Koszul a izq $\iff$ lo es a derecha)

4. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_{\Lambda V}(k, k) \cong S(V^*)$, y que $\mathrm{Ext}^\bullet_{k \oplus V}(k, k) \cong T(V^*)$.