ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Ejercicios cohomología de grupo

1. Tensorizar la resolución standard de $k[G]$ como $k[G]$ -bimódulo a derecha por $-\otimes_{k[G]} k$ (donde k es el G -módulo trivial) y describir el diferencial.
2. Deducir la fórmula del diferencial que calcula la cohomología de grupo vía el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n, M) = \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}, M) \cong \mathrm{Func}(G^n, M)$$

3. Sean M y N dos A -módulos izquierda, entonces

$$\mathrm{Hom}_k(M, N) \in {}_A \mathrm{Mod}_A$$

vía

$$(a \cdot f \cdot a')(m) := af(a'm)$$

si P es un A -bimódulo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-bimod}}(P, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_A(P \otimes_A M, N)$$

Sea A una k -álgebra sobre un cuerpo, M y N dos A -módulos a izquierda y consideramos $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ como A -bimódulo como antes. Muestre que

$$H^\bullet(A, \mathrm{Hom}_k(M, N)) = \mathrm{Ext}_A^\bullet(M, N)$$

En particular, para $A = k[G]$ y $M = k$ con acción trivial, se tiene que $\mathrm{Hom}_k(k, N) \cong N$ como G -módulo a izquierda y tiene acción trivial a derecha, lo que denotamos por N_ϵ . Luego la cohomología de Hochschild y la de grupo están ligadas por

$$H^\bullet(k[G], N_\epsilon) \cong H^\bullet(G, N)$$

$H^2(G, M)$ y extensiones abelianas

Consideraremos

$$0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

una extensión de grupos con M abeliano. Es decir, M es un grupo abeliano, subgrupo invariante de un grupo más grande E , y $E/M \cong G$.

1. Completar las demostraciones de los Lemas/Ejercicios 1,2,3,4 de la teórica.
2. La acción de G en M es trivial si y sólo si M es central en E .
3. E un grupo con $|E| = p^n$ y n primo, muestre que E sucede en una extensión de la forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

con $\mathbb{Z}_p$ central en E , por lo tanto E está determinado por un grupo G de orden p^{n-1} y un 2-cociclo $[f] \in H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ donde en $\mathbb{Z}_p$ la acción de G es trivial.

4. Sea $G = \mathbb{Z}^n$, notar $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1} \cdots, t_n^{\pm 1}]$ es una localización del anillo de polinomios. Muestre que el complejo de Koszul

$$0 \rightarrow k[t_1, \dots, t_n] \otimes \Lambda^n V \rightarrow \cdots \rightarrow k[t_1, \dots, t_n] \otimes \Lambda^2 V \rightarrow k[t_1, \dots, t_n] \otimes V \rightarrow k[t_1, \dots, t_n] \rightarrow k \rightarrow 0$$

donde $V = \bigoplus_{i=1}^n k e_i$ y $d(e_i) = (t_i - 1) \cdot$ da una resolución de k como $k[t_1, \dots, t_n]$ módulo donde la acción es evaluar t_i en 1 (no en 0). Muestre que localizando la anterior, se obtiene una resolución de k como $k[\mathbb{Z}^n]$ -módulo de la forma

$$0 \rightarrow k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^n V \rightarrow \cdots \rightarrow k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^2 V \rightarrow k[\mathbb{Z}^n] \otimes V \rightarrow k[\mathbb{Z}^n] \rightarrow k \rightarrow 0$$

5. Sea F_n el grupo libre con n generadores $x_1, \dots, x_n$ y k un anillo conmutativo. Muestre que hay una resolución de $k[F_n]$ como $k[F_n]$ -bimódulo de la forma

$$0 \rightarrow k[F_n] \otimes V \otimes k[F_n] \rightarrow k[F_n] \otimes k[F_n] \xrightarrow{\epsilon} k[F_n] \rightarrow 0$$

donde $V = \bigoplus_{i=1}^n k e_i$, con las “mismas” fórmulas que la resolución del álgebra tensorial. Concluya que

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n k[F_n] e_i \rightarrow k[F_n] \xrightarrow{\epsilon} k$$

$$e_i \mapsto x_i - 1$$

donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de k como $k[F_n]$ -módulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$ -módulo M .

6. (Lema de Shapiro) Sea H un subgrupo de G , y N un $\mathbb{Z}[H]$ -módulo, entonces

$$H_*(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \cong H_*(H, N)$$

$$H^*(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)) \cong H^*(H, N)$$

mostrar que si $[H : G] < \infty$, entonces

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$$

como $\mathbb{Z}[G]$ -módulo, con un isomorfismo natural en N .

7. Sean $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Bajo la hipótesis que B sea A -playo, o A -proyectivo, generalice el lema de Shapiro.

Aplicación: cálculo iterativo de grupos de orden p^n

Sea p primo y E un grupo de orden p^n . Entonces E tiene centro no trivial y por lo tanto un subgrupo (central), y en consecuencia un subgrupo (central) isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que E contiene a $\mathbb{Z}_p$. Luego $G := E/\mathbb{Z}_p$ es un grupo de orden p^{n-1} . Si (inductivamente) conocemos *todos* los grupos G de orden p^{n-1} , entonces sólo tenemos que calcular $H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ y reconstruir todos los posibles grupos de orden p^n .

Atención: Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden 512. (más precisamente, hay 10494213 (GAP)).

Grupos de orden p^3

Posible tema de final: Dar la lista de todos los grupos de orden p^3 , e indagar en lo que habría que haer pra tener los de orden p^4 .

1. Sea $C_n = \langle t : t^n = 1 \rangle$ el grupo (multiplicativo) cíclico de orden n . Utilice la resolución pequeña de $\mathbb{Z}$ como C_n -módulo trivial para calcular $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[C_n]}^2(C_n, M)$ donde M es un C_n -módulo. Explícite el caso en que M tiene acción trivial.
2. Sea $G = C_n \times C_n$. Use la fórmula de Künneth para mostrar que el producto tensorial (sobre $\mathbb{Z}$) de las resoluciones de C_n da una resolución para $C_n \times C_n$. Explícite lo más posible $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[C_n \times C_n]}^2(C_n, M)$ donde M es un módulo con acción trivial.
3. Sea E un grupo de orden p^3 . Muestre que E aparece en una extensión de la forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

donde $G \cong C_{p^2}$ o $G \cong C_p \times C_p$, y $\mathbb{Z}_p$ es central (y por lo tanto la acción de G en $\mathbb{Z}_p$ es trivial). Calcule todos los posibles grupos de orden p^3 .

4. Otra estrategia podría ser: si $|E| = p^3$ entonces E admite un subgrupo invariante de orden p^2 , llamémoslo M , y por lo tanto M es necesariamente abeliano (aunque no necesariamente central), y $G = E/M \cong C_p$.
 - Muestre que si M es central entonces E es abeliano, y del teorema de estructura sobre un dip sabemos que $E \cong \mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.
 - Si M no es central, entonces se tiene un acción no trivial de C_p en M .
 - Según $M \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, encuentre los elementos de orden p en $U(\mathbb{Z}_{p^2})$, o en $GL(2, \mathbb{Z}_p)$, eso dará las posibles acciones de C_p en M .
 - para cada una de las acciones (o de las acciones a menos de conjugación) calcule $H^2(C_p, M)$, y reconstruya las posibles tablas de multiplicar en E .

Adicionales sobre la fórmula $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$

1. Si M es un $k[G]$ -bimódulo, se define M^{ad} como el G -módulo a izquierda con acción

$$g \cdot_{ad} m := gm g^{-1}$$

Observación: el funtor ad preserva el espacio vectorial subyacente, por lo tanto preserva límites y colímites, sumas directas y productos directos. Veremos que también preserva objetos proyectivos e inyectivos, lo que nos dará una relación entre la (co)homología de grupos y la (co)homología de Hochschild de $k[G]$.

2. Si M es un $k[G]$ -bimódulo, entonces

$$\begin{aligned} H^0(k[G], M) &= M^{k[G]} = \{m \in M : am = ma, \forall a \in k[G]\} \\ &= (M^{ad})^G = \{m \in M : g \cdot_{ad} m = m, \forall g \in G\} \end{aligned}$$

3. Si $M = k[G] \otimes k[G]$ como $k[G]$ -bimódulo, entonces

$$M^{ad} \cong k[G]^{(G)} = k[G] \otimes V$$

donde a la derecha la acción de $k[G]$ es en el primer tensor, y V es un k -módulo libre de rango $\#G$. Sugerencia: considere el morfismo k -lineal

$$\begin{aligned} k[G] \otimes k[G] &\rightarrow k[G] \otimes V \\ g \otimes g' &\mapsto g \otimes g'g \end{aligned}$$

donde $V = k[G]$ como k -módulo. Encuentre la aplicación inversa y muestre que realiza el isomorfismo deseado. Concluya que si P es $k[G]^e$ proyectivo entonces M^{ad} es $k[G]$ -proyectivo como G -módulo.

4. Sean V y W dos G -módulos. Muestre que

$$Hom_k(V, W)$$

es un $k[G]$ -bimódulo vía

$$(gf g')(v) := gf((g')^{-1}m)$$

y por lo tanto un G -módulo vía la acción adjunta

$$(g \cdot_{ad} f)(v) = gf(g^{-1}(v))$$

Muestre que

$$(Hom_k(V, W))^{k[G]} = (Hom_k(V, W)^{ad})^G = Hom_{k[G]}(V, W)$$

5. Sea A una k -álgebra con k un cuerpo (o sea A sea k -proyectiva), muestre que si P_A es A -proyectivo a derecha, entonces el A -módulo a izquierda

$$I := Hom_k(P_A, k)$$

es inyectivo como A -módulo a izquierda.

6. Sea M un $k[G]^e$ -módulo a izquierda, luego M^* es $k[G]^e$ -módulo a derecha (y por lo tanto a izq.), si $p : P \rightarrow M^*$ un epi con P un $k[G]^e$ -proyectivo (a derecha), entonces

$$p^* : M^{**} \rightarrow P^*$$

es monomorfismo, con P^* un $k[G]^e$ módulo (a izquierda) inyectivo. Luego, la composición $M \rightarrow M^{**} \rightarrow P^*$ nos da un mono en un $k[G]^e$ -inyectivo. Concluya que todo inyectivo es isomorfo a un factor directo de un producto arbitrario de $(k[G]^e)^*$

7. Sea I un $k[G]^e$ -inyectivo, que podemos suponer un sumando directo de $((k[G]^e)^{(X)})^* = ((k[G]^e)^*)^X = (k^{G \times G})^X$. Muestre que el $k[G]$ -bimódulo $(k[G]^e)^* \cong k^{G \times G}$ verifica

$$(k^{G \times G})^{ad} \cong (k^G)^X$$

con $\#X = \#G$. Concluya que si I es $k[G]^e$ inyectivo entonces I^{ad} es inyectivo como G -módulo.

8. Muestre que $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$. Sugerencia: calcule $H^\bullet(k[G], M)$ usando una resolución $k[G]^e$ **inyectiva** de M .