Álgebras filtradas: el ejemplo del álgebra de Weyl

k en principio anillo conmutativo. Sea $\partial : k[x] \to k[x]$ dado por

$$\partial(p(x)) = p'(x)$$

y por abuso de notación, indicaremos $x=$ la multiplicación por x, como endomorfismod e $k[x]$. Muestre que

$$[\partial, x] = \mathrm{Id} \in \mathrm{End}_k(k[x])$$

Se define el álgebra de Weyl $A_1(k) := k\{x, y\}/([y, x] = 1)$ y denotamos $\partial = \overline{y} \in A_1(k)$. Por lo anterior, $A_1(k)$ tiene a $k[x]$ como representación natural.

1. Muestre que los monomios $\{x^i\partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ forman un sistema de generadores como k-módulo.

2. *Supondremos de aquí en adelante que k es un cuerpo de característica cero.* Muestre que $A_1(k)$ no tiene representaciones de dimensión finita sobre k. (Sugerencia: si V es una representación de $A_1(k)$, se tiene que

$$[\partial|_V, x|_V] = \mathrm{Id}_V$$

donde, si $P \in A_1(k)$, denotamos $P|_V = P \cdot - : V \to V$. En particular, Id_V debe ser un conmutador, y si V tiene dimensión finita esto implica que tiene traza cero, absurdo.

3. Consideremos $P = \sum_{i,j} a_{ij}x^i\partial^j \in A_1(k)$ y llamaremos *parte principal* a la parte con j máximo dentro del soporte de los a_{ij}, es decir, que podemos escribir a P como

$$P = p(x)\partial^N + \sum_{i,j:j<N} a_{ij}x^i\partial^j$$

Si $M = k[x]$ como $A_1(k)$-módulo, muestre que

$$P \cdot x^N = Np(x)$$

y por lo tanto $p(x)$ está bien definido (como función de P). Concluya con un argumento inductivo que $\{x^i\partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ no sólo generan sino que son una k-base de $A_1(k)$. (ell resultado es cierto en cualquier característica, pero con otra demostración)

4. Consideramos en $A_1(k)$ la filtración dada por $F_p(A_1(k)) = \langle x^i\partial^j : i + j \le p\rangle$ (subespacio generado sobre k). Muestre que $gr(A_1(k)) \cong k[x, y]$ como k-álgebra.

5. Sea $P = \sum_j a_jp_j(x)\partial^j$, muestre que

$$[\partial, P] = \sum_j a_ip'_j(x)\partial^j$$

y si escribimos $Q = \sum_i x^i q(\partial)$ con q un polinomio en ∂, entonces

$$[x, Q] = -\sum_i x^i q'(\partial)$$

(a) Concluya que $A_1(k)$ es simple (recordamos que asuminos k cuerpo de caracteŕstica cero). Más precisamente, si I es un ideal bilátero y $P \in I$ es no nulo, entonces I contiene una constante no nula.

(b) Concluya también (recordamos que asuminos k cuerpo de caracteŕstica cero) que $A_1(k)$ es central, es decir, $Z(A) = k$. Si k tiene característica $p > 0$ muestre que x^p y ∂^p son centrales en $A_1(p)$

6. Sea V el espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{e_x, e_\partial\}$. Muestre (Shridaran) que la siguiente es una resolución, donde los diferenciales son A-lineales a izquierda y derecha, definidos en base por

$$0 \to A \otimes e_x \wedge e_\partial \otimes A \longrightarrow A \otimes (ke_x \oplus ke_\partial) \otimes A \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \otimes e_x \wedge e_\partial \otimes 1 & \mapsto & x \otimes e_\partial \otimes 1 - 1 \otimes e_\partial \otimes x \\ & & -\partial \otimes e_x \otimes 1 + 1 \otimes e_x \otimes \partial, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \otimes e_x \otimes 1 & \mapsto & x \otimes 1 - 1 \otimes x, \\ 1 \otimes e_\partial \otimes 1 & \mapsto & \partial \otimes 1 - 1 \otimes \partial. \end{array}$$

Sugerencia:

(a) Muestre que $d^2 = 0$

(b) Encuentre una filtracion del complejo tal que el graduado asociado sea una resolución de Koszul.

7. Use la resolución anteror para mostrar que

$$H^\bullet(A, M) \cong H_{2-\bullet}(A, M) \; \forall M \in {}_A Mod_A$$

(Observación: basta ver el caso $M = A^e$.) Calcule $HH^n(A)$ y $HH_n(A)$ para $n = 0, 1, 2$.