Álgebra Homológica

Categorías derivadas I

1. Si $u : X \to Y$, se define $cyl(f)_n = X_n \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$ con diferencial
$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - u(x))$$
   (a) Muestre que $d^2 = 0$.
   (b) En el caso $u = \mathrm{Id}_X$,
      i. muestre que $cyl(X) := cyl(\mathrm{Id}_X)$ es homotópicamente equivalente a X.
      ii. $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos $\iff$ ϕ es de la forma
$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$
      donde $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(M, N)$ y $h : X[-1] \to Y$ es una homotopía entre f y g, es decir,
$$f - g = dh + hd$$

2. $i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ es un morfismo de complejos, también $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$. Las proyecciones $p_i : cyl(X) \to X$ dadas por $p_1(x, x', x'') = x$ y $p_(x, x', x'') = x''$ *no son morfismso de complejos*, sin embargo,
$$p : cyl(X) \to X$$
$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$
sí es un morfismo de complejos, y se tiene $p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$. Muestre que tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

Reccordar que llamamos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna
$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$
que sea isomorfa a un cono, más precisamente, un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ es a toda terna donde exista un diagrama de la forma
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "a[-1]"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$
donde los cuadrados conmutan a menos de homotopía y a, b, c son equivalencias homotópicas. Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial
$$d(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$
Un triángulo que directamente sea un cono se lo llamará *distinguido*.

Los triángulos en $D(A)$ son la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

3. Muestre que la suma directa de triángulos es triángulo.

4. Sea A es k-álgebra, $M \in \mathrm{Chain}(A)$, $V \in \mathrm{Chain}(k)$, definimos $M \otimes V$ con la estructura diferencial usual y la estructura de A-módulo dada por M. Muestre que

   - Si $f : M \to N$ es un morfismo de complejos, entonces

$$(M\otimes V)[-1] \cong M[-1]\otimes V, \qquad Co(f\otimes \mathrm{Id}_V) \cong Co(f)\otimes V, \qquad cyl(f\otimes \mathrm{Id}_V) \cong cyl(f)\otimes V,$$

   - Si $X \to Y \to Z \to X[\text{-}1]$ es triang. en $\mathcal{H}(A) \Rightarrow X\otimes V \to Y\otimes V \to Z\otimes V \to X[\text{-}1]\otimes V$ también. Si k es cuerpo (o los V_n son k-playos) y se tenía un triang. en $D(A)$ $\Rightarrow X\otimes V \to Y\otimes V \to Z\otimes V \to X[\text{-}1]\otimes V$ también Δ en $D(A)$.
   - Si $f \sim_h g$ son dos morfismos homotópicos, entonces $f \otimes \mathrm{Id}_V \sim g \otimes \mathrm{Id}_V$

5. Muestre que si $(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[\text{-}1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[\text{-}1] \xrightarrow{-u} Y[\text{-}1]) \qquad \text{y} \qquad (Z[1] \xrightarrow{-w} X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z)$$

   también lo son. (el primer caso lo hicimos en clase, hacer el segundo)

6. Denotamos por la misma letra A al complejo de A-módulos concentrado en grado cero con componente 0 igual a A. Muestre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M[n]) \cong H_n(M)$ (iso de funtores).

7. Sea $x \in A$ un elemento central, cómo podría describir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A/(x), M[n])$?

8. Sea $x \in A$ un elemento central y $C := Co(A \stackrel{x}{\to} A)$ (donde identificamos un morfismo de A-módulos con un morfismo de complejos concentrados en grado cero, notar que el cono no está concentrado en grado cero), describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(C, M)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(C, M)$.

9. $u : X \to Y$ es un morfismo y $X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1]$ es un triángulo entonces Z está determinado por $u : X \to Z$ a menos de isomorfismo (no único).

10. Consideremos la categoría $\mathcal{H}(A)$ y consideramos $\widetilde{D}(A)$ la categoría con los mismos objetos de $\mathcal{H}(A)$ (o sea, los objetos de $\mathrm{Chain}(A)$) y definimos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(M, N)/\equiv$$

   donde $\equiv$ es la relación de equivalencia determinada por $f \equiv 0$ si y sólo si existe un complejo acíclico C y una factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & N \\ & C \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

   (y $f \equiv g \iff f - g \equiv 0$). Muestre que la proyección en el Hom define un funtor natural $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$, que $\widetilde{D}(A)$ es una categoría naturalmente triangulada (con los triángulos isomorfos a los que vienen de conos), que el funtor $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$ manda triángulos, que los q-isos van a parar a isomorfismos, y que $\widetilde{D}(A) \cong D(A)$.