Álgebra Homológica

Categorías derivadas II

Triángulos en $D(A)$

1. Muestre que si
$$0 \to X \overset{f}{\to} Y \overset{p}{\to} Z \to 0$$
es una s.e.c. en Chain(A) entonces existe un quasi-isomorfismo $Co(f) \to Z$ y que esa s.e.c. se la puede ver como parte de un triángulo en $D(A)$. Concluya la s.e.l. de homología aplicando $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, -)$.

2. Recíprocamente, si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo en $D(A)$, muestre que existe un morfismo de complejos $f : M \to N$ y un isomorfismo de triángulos (en $D(A)$) entre el triángulo original y a una s.e.c. del tipo
$$0 \to N \overset{i}{\to} Co(f) \overset{\pi}{\to} M[-1] \to 0$$

Localización

3. Consideremos un diagrama conmutativo en $Chain(A)$ con s y t q-isomorfismos
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, "s'"] \\ Z \arrow[r, "t'"] & W \end{tikzcd}$$
Muestre que t' es q-iso $\iff$ s' es q-iso.

4. Ver que la suma en $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N)$ está bien definida. Recordamos la suma estaba definida via
$$\begin{tikzcd} & X_1 & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\ & X_2 & \end{tikzcd} \quad t^{-1}f + s^{-1}g = ?$$
$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, dotted, "s'"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X_3 & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \arrow[l, dotted, "s't=t's"] \\ & X_2 \arrow[u, dotted, "t'"'] & \end{tikzcd}$$
$$t^{-1}f + s^{-1}g = t^{-1}(s')^{-1}s'f + (s)^{-1}(t')^{-1}t'g = (s't)^{-1}(s'f + t'g)$$

y la relación de equivalencia está dada por

$$X \overset{f_1}{\to} Y_1 \overset{t_1}{\leftarrow} Z \quad \sim \quad X \overset{f_2}{\to} Y_2 \overset{t_2}{\leftarrow} Z$$

$\iff$ $\exists$ un diagrama conmutativo (con t q-iso)

$$\begin{tikzcd}
& Y_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "t"] & Y \\
& Y_2 \arrow[ur, "t_2"'] &
\end{tikzcd}$$

5. Ver que la composición en $D(A)$ está bien definida.

Las categorías $D(A)$ y $\mathcal{H}_{cerr}(A)$

6. Sea k semisimple. Muestre que un complejo es acíclico si y sólo si es contráctil, por lo tanto equivalencia homotópic coincide con quasi-isomorfismo. El funtor proyección natural $\mathrm{Chain}(k) \to \mathcal{H}(k)$ tiene la propiedad universal de la localización con respecto a los q-isos, y por lo tanto $\mathcal{H}(k) = D(k)$.

7. Muestre que el iso de k-modulos $\mathrm{Hom}_A(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_k(V, M)$ induce los isomorfismos
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(k)}(V, M)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(V, M)$$
$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{D(k)}(V, M)$$

8. Sea $P \in \mathrm{Chain}(A)$ un sumando directo de L, es decir, existe un complejo Q tal que $P \oplus Q \cong L$. Muestre que P es parte de una s.e.c. que se parte de la forma
$$0 \to P \to L^{\mathbb{N}} \to L^{\mathbb{N}} \to 0$$
Sugerencia: considere el isomorfismo
$$(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \cdots \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \cdots$$
Concluya con argumento de triángulos que si una subcategoría triangulada de una categoría triangulada tiene sumas directas numerables, entonces es cerrada por sumandos directos.

9. Recordamos $P \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice cerrado si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, -) \to \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, -)$ es un iso. Muestre el **Lema:** $P \overset{u}{\to} P' \overset{v}{\to} P'' \overset{w}{\to} P[-1]$ un triángulo en $\mathcal{H}(A)$, si dos son cerrados, el tercero también.

10. Si $M, N \in \mathrm{Chain}(A)$, entonces
$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M), P(N))$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M), P(N))$$

11. Muestre que si $M, N \in A$-Mod y los vemos como complejos concentrados en lugar cero, entonces $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}^n_A(M, M)$

Funtores derivados

12. Sea $F : A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}$ un funtor aditivo y consideramos $DF : D(A) \to D(B)$ dado por
$$DF(M) := F(P_A(M))$$
donde $P_A(M)$ es "una resolución funtorial de M".
    (a) Muestre que si F es exacto entonces F está bien definido en $D(A)$ y $F(\rho) : DF \to F$ es un isomorfismo de funtores.
    (b) Si $F : A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}$ es exacto a derecha y $M \in A\text{-Mod}$, que lo vemos como complejo concentrado en lugar cero, entonces $H_0(DF(M)) \cong F(M)$.
    (c) Sean $F : A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}$ y $G : B\text{-Mod}\to C\text{-Mod}$ dos funtores aditivos, si uno de los dos es exacto entonces
$$DG \circ DF \cong D(G \circ F) : D(A) \to D(C)$$

13. Sea G un grupo y $N \triangleleft G$ un subgrupo *normal* y V un G-módulo. Muestre que
    (a) V^N es naturalmente un $k[G/N]$-módulo, más aún,
    (b) $H^n(N, V)$ es un G/N-módulo para todo n.
    (c) $V^G = (V^N)^{G/N}$
    (d) Si N tiene índice finito $(G : N) = d$, k es un anillo con $\frac{1}{d} \in k$ y V un $k[G]$-módulo, entonces $H^n(G, V) = H^n(N, V)^{G/N}$ para todo n.

14. Sea A un anillo y G un grupo que actúa en A por automorfismos de anillo. Se define $A \rtimes G = A[G]$ como grupo abeliano pero con la multiplicación
$$ag \cdot bh = ag(b)gh$$
    (a) Si M es un $A \rtimes G$-bimódulo, entonces
$$M^A = H^0(A, M) = \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$$
es un G-módulo vía
$$g(m) := gmg^{-1}$$
    (b)
$$\{m \in M : \omega m = m\omega \ \forall \omega \in A \rtimes G\} = M^{A\rtimes G} = H^0(A \rtimes G, M) =$$
$$= (M^A)^G = \{m \in M^A : g(m) = m \ \forall g \in G\}$$
    (c) Si G es finito y $|G|$ es inversible en A, entonces
$$H^n(A \rtimes G, M) = H^n(A, M)^G$$

15. Sea k un cuerpo, A una k-álgebra, y $\mathcal{T}$ un subcategoría de $D(A)$ que satisface

(a) $\mathcal{T}$ es estable por suspensión y triángulos (i.e. $M \in \mathcal{T}$ entonces $M[1]$ y $M[-1]$ también, y si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo, $X, Y \in \mathcal{T}$ entonces Z también)

(b) Si $V \in \mathrm{Chain}(k)$ y $X \in \mathcal{T}$ entonces $X \otimes V \in \mathcal{T}$

(c) $\mathcal{T}$ es estable por sumas directas arbitrarias

Muestre que si $A \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \cong D(A)$.