Álgebra Homológica

Construcción bar y cobar

Resolución standard normalizada

Sea A una k-álgebra y denotamos $\overline{A} = A/k.1$, es un k-módulo. Mostraremos que b' queda bien definido en $(A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A)$ y que la proyección induce un quasi isomorfismo

$$(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, b') \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A, \overline{b}')$$

1. Consideremos el módulo graduado (el morfismo es el inducido por la inclusión $k \subset A$ en el lugar correspondiente)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A
\end{tikzcd}$$

   Muestre que es un subcomplejo.

2. Muestre que el conúcleo de la inclusión anteior está dada por

$$a \otimes b \otimes 1 \otimes c \longmapsto ab \otimes 1 \otimes c$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A
\end{tikzcd}$$

   Muestre que hay un isomorfismo obvio entre el subcomplejo

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A^{\otimes 2} \ \otimes \ k \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \ \otimes \ k \otimes A \xrightarrow{b'} A \ \otimes \ k \otimes A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

   y la resolución de A tensorizada con k y A (con diferencial $b' \otimes \mathrm{Id}_k \otimes \mathrm{Id}_A$) :

$$\Big(\cdots \longrightarrow A \otimes A \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A \xrightarrow{m} 0 \longrightarrow 0 \Big) \otimes k \otimes A$$

   Concluya que este subcomplejo es acíclico y por lo tanto la proyección es un quasi-isomorfismo

3. Por simplicidad escribiremos V^n en lugar de $V^{\otimes n}$. Supongamos inductivamente que la proyección da un quasi-isomorfismo para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{n_0+2} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0+1} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A \otimes A^2 \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^2 \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^2 \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

Si al complejo de abajo lo llamamos $C_{n_0}(A)$, calcule el núcleo del morfismo natural $C_{n_0} \to C_{n_0+1}$ que proyecta A en $\overline{A}$ en el factor correspondiente (a partir del lugar n_0+1). Calcule b' restringido a ese núcleo (recuerde que $\overline{1}=0$ en $\overline{A}$) y concluya que ese subcomplejo núcleo es acíclico, con un argumento similar al punto anterior.

4. Concluya que $H_\bullet(A,M) = H_\bullet(M \otimes A^{\otimes \bullet}) \cong H_\bullet(M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet})$ y similarmente para cohomología, si $C^n(A,M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$, el siguiente es un subcomplejo

$$\begin{aligned} \overline{C}^n(A,M) &= \mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes n}, M) \\ &= \{f : A^{\otimes n} \to M : f(a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots a_n) = 0\} \end{aligned}$$

= las funciones que dan cero si por lo menos uno de los factores es un 1. Se llama el complejo normalizado, y calcula la misma cohomología.

La construcción bar

La siguiente es una construcción que a toda álgebra aumentada $\epsilon : A \to k$ le asigna una coálgebra diferencial graduada

Definición 1. Sea $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras que consideramos fijado, luego k es un A-módulo vía ϵ. Notar que $A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon$ como k-módulo, luego $\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon$. De aquí en adelante, como ϵ está fijo, denotamos $\overline{A} := \mathrm{Ker}\epsilon$.

Definimos $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

donde hemos denotado $|$ al producto tensorial interno de T^cA (ese es el origen del nombre "construcción bar"), y por convención en esa suma $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Por ejemplo, si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

5. Muestre que si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces b' es una super co-derivación, donde

$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n$$

Observar que ya sabíamos que $b'^2 = 0$.

6. Muestre que $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

7. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión

$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^¡ \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') \end{tikzcd}$$

es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d=0$.

8. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática y la inclusión anterior es un quasi-isomorfismo, entonces A es Koszul.

Construcción cobar

Dualmente a la construcción bar, a toda coálgebra co-aumentada le asignaremos un álgebra d.g.

Definición 2. Sea C una coálgebra sobre k, diremos que es co-aumentada si se tiene dado un morfismo de coálgebras $k \to C$, es decir, si C tiene un elemento e tal que $\Delta e = e \otimes e$. De aquí en adelante fijaremos una coálgebra coaumentada y su coaumentación.

Notar que por counitariedad, si $\epsilon : C \to k$ es la counidad, necesariamente $\epsilon(e) = 1$, y por lo tanto tenemos una descomposición como k- eesp. vectoriales

$$C \quad = \quad \overline{C} \quad \oplus \quad ke$$

$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\epsilon$. Se define

$$\Omega(C) := T\overline{C}$$

el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$. Es graduada poniendo $\deg \overline{C} = 1$. Recordar que (C, Δ_C) es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c_i' - \epsilon(c_i')e) \otimes (c_i'' - \epsilon(c_i'')e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

9. Muestre (sugerencia: use el axioma de la counidad de C) que

$$d_\Delta c = \Delta c - e \otimes c - c \otimes e$$

10. Considerando $\overline{C} \otimes \overline{C} \subset T\overline{C}$ como subespacio, muestre que d_Δ se extiende de manera única a una super-derivación (de grado $+1$) que coincide con d_Δ en los generadores.

$$d_\Delta : T\overline{C} \to T\overline{C}$$

11. Muestre que $d_\Delta^2 = 0$ si y sólo si Δ es coasociativa.

Se denomina *construcción cobar* de la coálgebra C a la k-álgebra diferencial graduada

$$\Omega(C) = (T\overline{C}, d_\Delta)$$

12. Sea $A = TV/(R)$ y $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^cV = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$. Notar que C es coaumentada con $e = 1$, $\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots$. Considermos $\overline{C} \to V$ la proyección en el sumando V. Se define $\Omega(C) \to C$ por la composición

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Mostrar que es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas, donde A se la considera d.g. con su graduación habitual y con diferencial nulo.

13. Sea $A = TV$ (o sea, $R = 0$), describa el morfismo anterior en este caso:

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

14. Lo mismo que el ejercicio anterior pero para $A = k[x]/(x^2) = T(kx)/(x \otimes x)$. Calcule d_Δ y $H_\bullet(\Omega(C))$ de manera directa.

15. Supongamos $\dim V < \infty$.

    Notar que en cada grado n, $\dim A_n < \infty$ y $\Omega(A^{¡})_n = \overline{A}^{¡ \otimes n}$ es a su vez bi-graduado teniendo en cuenta la graduación interna de $\overline{A}^{¡} = V \oplus R \oplus \cdots$. consideramos A bi-graduada con una bi-graduación concentrada A_n en el lugar (n, n)

    (a) en cada bigrado (n, m) ambas álgebras ($\Omega(A^{¡})$ y A) tienen componentes de dimensión finita, y por lo tanto podemos considerar sus duales (bi)graduados (los llamaremos $(-)'$ en vez de $(-)^*$).

    (b) $(\Omega(A^{¡})', d_\Delta^*) = (B(A^!), b')$. *Sugerencia: en vez de demostrar esta versión, es más cómodo mostrar que*

    $$B(A^!)' \cong \Omega(A^{¡})$$

    (iso de álgebras graduadas) y en vez de mostrar que $d_\Delta^* = b'$ es más fácil ver que $b'^* = d_\Delta$ pues siendo una (super) derivación, basta ver que coincide en $\overline{A}^{¡} \subset T\overline{A}^{¡} = \Omega(A^{¡})$. También, cambiando A por $A^!$, como $A^{!!} = A$, se puede demostrar equivalentemente el siguiente iso de duales bi-graduados:

    $$B(A)' \cong \Omega(A')$$

    (c) El morfismo $\Omega(A^{¡}) \to A$ es un q-iso si y solo si su dual (bi)graduado

    $$A' \to (B(A^!), b')$$

    si y sólo $A^!$ es Koszul (si y sólo si A es Koszul)