Álgebra Homológica - 1er cuat. 2015

Cálculo de Tor 2

1. Sea A un anillo integro, $x \in A$ no nulo. Muestre que

$$\mathrm{Tor}_n^A(A/(x), M) = 0 \ \forall n \geq 2$$

Describa lo mas explicitamente posible $\mathrm{Tor}_n^A(A/(x), A/(y))$, donde $y \in A$ (y $n \in \mathbb{N}$).

2. Muestre que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

3. (Cambio de base playo) Sea $A \to B$ un morfismo de anillos tal que B es A-playo como A-modulo a iquierda. Si W es un B-modulo (y por lo tanto, via el morfismo $A \to B$ es un A-modulo, muestre que

$$\mathrm{Tor}_n^B(M \otimes_A B, W) = \mathrm{Tor}_n^A(M, W)$$

compare con el último ejercicio de la guía 5.

4. Sea $A = k[\mathbb{Z}]$, observar que $A \cong k[x]_S$, donde $S = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$. Describa lo más explicitamebnte posible $\mathrm{Tor}_n^{k[\mathbb{Z}]}(M, N)$, donde M y N son $k[\mathbb{Z}]$-módulos cualesquiera.

5. Sea A integro y $0 \neq x \in A$, muestre que el complejo

$$X = (\cdots 0 \to A \xrightarrow{x} A \to 0 \cdots)$$

verifica $Z(X)_n$ y $B(X)_n$ proyectivo para todo n, luego, se puede utilizar la fórmula de Künneth para este complejo. Dice ésto algo nuevo con respecto al ejercicio 1?

Cálculo de Ext - 1

1. Utilizando simplemente la definición de $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = H_n(\mathrm{Hom}_A(P(M)_\bullet, N), d^*)$, donde $(P(M)_\bullet, d)$ es alguna resolución proyectiva de M, muestre que

   (a) si P es proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}_A^n(P, N) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo N,

   (b) si I es inyectivo, entonces $\mathrm{Ext}_A^n(M, I) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo M.

2. Si A es dominio principal, entonces $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$ si $n \geq 2$.

3. Muestre que $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$

4. Calcule $\mathrm{Ext}_{k[x]}^1(k, k)$. Es cierto que $\mathrm{Ext}_{k[x]}^1(k[x]/(f), k[x]/(g)) \cong k[x]/(f, g)$?

5. Si $A = k[x]$ y M es un A-modulo k-proyectivo, utilizando la resolución

$$0 \to A \otimes_k M \xrightarrow{x \otimes \mathrm{Id}_M} A \otimes_k M \to M \to 0$$

describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ para todo n y todo N.

6. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial y $A = TV$, el álgebra tensorial. Si M es un TV-módulo, muestre que el complejo

$$0 \to TV \otimes V \otimes M \xrightarrow{d} TV \otimes M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

es exacto, donde las flechas están definidas por $d(w \otimes v \otimes m) = wv \otimes m - w \otimes vm$, $\rho(w \otimes m) = wm$ ($w \in TV$, $v \in V$, $m \in M$). Concluya que $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ si $n \geq 2$.

7. Concluya del ejercicio anterior que cocientes de TV-inyectivos son TV-inyectivos.

8. Utilice la resolución del ejercico 9 de la práctica 3 (donde se resuelve a k como $k[x, y]$-modulo) para calcular $\mathrm{Ext}^n_{k[x,y]}(k, k)$, para todo n.

9. Sea $G = C_n = \langle g : g^n = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden n. Calcule $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Si M es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo, describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$, y en particular $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

10. Sea $G = C_n \times C_m$. Tensorizando una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_n]$ y otra resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_m]$ (y la fórmula de Künneth) encuentre una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. Utilícela para describir $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$, donde M es un $k[G]$-modulo.