Complejos dobles, resoluciones, cálculo de Tor

Hacia la s.e.larga de Tor

1. Muestre que si $0 \to M_i \to^{f_i} N_i \to^{g_i} R_i \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos $\forall i \in I$, entonces
$$0 \to \bigoplus_I M_i \xrightarrow{\oplus_I f_i} \bigoplus_I N_i \xrightarrow{\oplus_I g_i} \bigoplus_I R_i \to 0$$
es una s.e.c. Deduzca que si $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^f N_{\bullet\bullet} \to^g R_{\bullet\bullet} \to 0$ se dice una s.e.c. de complejos dobles entonces
$$0 \to Tot(M_{\bullet\bullet}) \to^f Tot(N_{\bullet\bullet}) \to^g Tot(R_{\bullet\bullet}) \to 0$$
es una s.e.c. de complejos usuales.

2. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos. Muestre que
$$Co(f) = Tot\left(\begin{tikzcd} \cdots & M_{n-1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_{n+1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \arrow[l] \\ \cdots & N_{n-1} \arrow[l, "d"'] & N_n \arrow[l, "d"'] & N_{n+1} \arrow[l, "d"'] & \arrow[l] \end{tikzcd}\right)$$
donde la fila de N es la fila 0 y la de M es la fila 1.

3. Considere el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$
con columnas exactas y cuyas filas son complejos, Suponiendo que la primera y tercera fila son exactas y que Q_{n+1} es proyectivo, muestre que se puede extender a un diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

de manera que la columna agregada es exacta, y la fila del medio sigue siendo un complejo. Sugerencia: considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "i"] & Im(d_P) = \operatorname{Ker}(d_P) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[d, "p"] & \operatorname{Ker}(d_R) \arrow[rr, hook] \arrow[d, dashed] & & & \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "?"] & Im(d_Q) = \operatorname{Ker}(d_Q) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "?"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Observación: para ver que la sucesión de los núcleos es exacta se puede utilizar la sucesión exacta larga de homología.

4. Concluya del ejercicio anterior que si $0 \to M \to E \to N \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos y resolvemos a M y a N:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & E \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ se puede completar a un diagrama con columnas exactas y filas complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Concluya que necesariamente las columnas (salvo la de M,E,N) se parten y por lo tanto los R_n son proyectivos). Además (usando la s.e.larga) la fila del medio también es exacta.

5. Con las notaciones del ejercicio anterior, muestre que para cualquier A-módulo a derecha

X, la siguiente es una s.e.c. de complejos "filas"

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} P_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} P_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} R_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} R_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} R_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \underset{A}{\otimes} Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{A}{\otimes} Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto inducen una s.e.larga

$$\cdots \to Tor_2^A(X,N) \to Tor_1^A(X,M) \to Tor_1^A(X,E) \to Tor_1^A(X,N) \to X \underset{A}{\otimes} M \to X \underset{A}{\otimes} E \to X \underset{A}{\otimes} N \to 0$$

Un poco de resoluciones y levantamientos de morfismos

1. Sobre levantamiento de morfismos cuando se tiene una homotopía de contracción: Consideremos un complejo de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift right] & P_n \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_{n-1} \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right] & P_1 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "\epsilon"'] & M \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

provisto de una homotopía de contracción $h_n : P_n \to P_{n+1}$ (en principio $\mathbb{Z}$-lineal, y por convención $P_{-1} := M$), es decir, $hd + dh = \mathrm{Id}$. En particular es exacto.

Si tenemos un complejo de A-módulos libres y un morfismo A-lineal $f : N \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift right] & P_n \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_{n-1} \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right] & P_1 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "\epsilon"'] & M \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se define $f_0 : A^{(X_0)} \to P_0$ como el único morfismo A-lineal tal que, si $x \in X_0$,

$$f_0(x) = hf\partial(x)$$

e inductivamente, si se tienen definidas las f_i para $i \leq n$, se define f como la única extensión A-lineal tal que $f_n(x) = h(f_{n-1}(x))$ (para todo $x \in X_n$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "f_n"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift left] & P_n \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "d"] & P_{n-1} \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & P_1 \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left, "d"] & P_0 \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left, "\epsilon"] & M \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Muestre que la familia de morfismos $\{f_n\}_n$ así construida es un morfismo de complejos.

2. Sea A una k-álgebra k-proyectiva y supongamos dado un complejo *exacto* de la forma

$$\cdots \to A \otimes V_2 \otimes A \stackrel{d_2}{\to} A \otimes V_1 \otimes A \stackrel{d_1}{\to} A \otimes A \stackrel{m}{\to} A \to 0$$

donde V_i son k-módulos libres, $\otimes = \otimes_k$ y todos los morfismos son A-lineales a izquierda y a derecha. Muestre que

(a) Todas las componentes graduadas de este complejo son proyectivos como A-módulos a izquierda, y como A-módulos a derecha.

(b) Existe una homotopía de contracción A-lineal a derecha (y también existe alguna otra que es A-lineal a izquierda).

(c) Para cualquier $M \in {}_A Mod$, el complejo siguiente es exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_2\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes V_1\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_1\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "m\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\underset{A}{\otimes} M \to 0 \arrow[d, "\cong"] \\
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2\otimes M \arrow[r, "\widetilde{d_2}"] & A\otimes V_1\otimes M \arrow[r, "\widetilde{d_1}"] & A\otimes M \arrow[r, "\rho_M"] & M \to 0
\end{tikzcd}$$

(d) Si M es k-proyectivo, entonces la anterior es una resolución A-proyectiva de M (y funtorial en M).

3. Observar que $k[x] \otimes k[x] \cong k[x,y]$ y que $k[x,y]/(x-y) \cong k[x]$. Muestre que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to k[x] \otimes k[x] \stackrel{d}{\to} k[x] \otimes k[x] \stackrel{m}{\to} k[x] \to 0$$

donde $d(p\otimes q) = xp\otimes q - p\otimes xq$. Concluya que para todo $k[x]$-módulo que sea k-proyectivo, la siguiente es una resolución $k[x]$-proyectiva de M:

$$0 \to k[x] \otimes M \stackrel{\partial}{\to} k[x] \otimes M \stackrel{\rho}{\to} M \to 0$$

donde $\partial(p \otimes m) = xp \otimes m - p \otimes xm$.

4. (* Más adelante veremos una generalización *) Sea $A = \mathbb{Z}[M^+(X)]$ el anillo libre en un conjunto X (ver el apunte grupal para la definición). La siguiente es una sucesión exacta:

$$0 \to A \otimes k^{(X)} \otimes A \stackrel{d}{\to} A \otimes A \stackrel{m}{\to} A \to 0$$

donde $d(a \otimes x \otimes b) = ax \otimes b - a \otimes xb$.

Cálculo de Tor

1. Sea k un anillo comutativo, consideramos $A = k[x]/x^2$. Muestre que

$$\cdots A \stackrel{x}{\to} A \stackrel{x}{\to} A \stackrel{\epsilon}{\to} k \to 0$$

es exacta, donde $\epsilon(\lambda + \mu x) = \lambda$. Encuentre una homotopía k-lineal de contraccion. Deduzca que para todo $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}_n^A(k,M) \cong \{m \in M : xm = 0\}/xM$, en particular, $\mathrm{Tor}_n^A(k,k) = k$ para todo $n \geq 1$.

2. Sea $A = k[x]$ con k un cuerpo. Sabiendo que

$$0 \to k[x] \otimes_k M \to^d k[x] \otimes_k M \to^\epsilon M \to 0$$

(con $d(p(x) \otimes m) = p(x) \otimes xm$ y $\epsilon(q(x) \otimes m) = q(x) \cdot m$) es exacta, describa $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ en términos de M y N para todo n.

3. Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(\oplus_i M_i, N) \cong \oplus_i \mathrm{Tor}_n^A(M_i, N)$, y lo mismo para la otra variable.

4. Sea $n > 1$ y $A = k[x]/(x^n - 1)$. Notar que $A \cong k[C_n]$ con C_n=grupo cíclico de orden n. Consideramos $M = k$ con la estructura de A-módulo dada por $x \cdot \lambda = \lambda$.

   (a) Muestre que si M es un k-módulo con un automorfismo k-lineal g de orden n, entonces es un A-módulo via $x \cdot m := g(m)$ y que

   $$M_g = k \otimes_A M$$

   (b) Muestre que si $N = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$, entonces

   $$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

   provee de una resolución proyectiva de k como A-módulo (aquí $\epsilon(p(x)) = p(1)$). Concluya que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) \cong \mathrm{Tor}_{n+2}^A(k, M)$ para todo $n \geq 1$. Describa lo más explícitamente posible Tor_1 y Tor_2.

   (c) Si n es inversible en k, muestre que k es isomorfo a un sumando directo de A (como A-módulo), concluya que en ese caso $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

   (d) Si la multiplicación por n no es necesariamente inversible en k, pero en M SI, muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

5. Sea $A = k[x, y]$ y consideramos k como A-módulo via $p(x, y) \cdot \lambda := p(0, 0)\lambda$. Utilice el ejercicio 9 de la práctica 3 para mostrar que

$$\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0 \ \forall n \geq 3$$

Describa lo más explícitamete posible $\mathrm{Tor}_1^A(k, M)$ y $\mathrm{Tor}_2^A(k, M)$.

6. Sea $0 \to X \to Y \to Z$ una s.e.c. de A-módulos. Muestre que si X y Z son playos, entonces Y es playo. También si Y y Z son playos, entonces X es playo.

7. Sea A un dominio íntegro. Muestre que si M es playo entonces M no tiene torsión.

8. Sea A un anillo conmutativo. Si M y N son dos A-módulos a izquierda, los consideramos como A-bimódulos de manera simétrica (i.e. $ma = am$, etc). Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ es naturalmente un A-módulo (simétrico).

9. Sea A un anillo conmutativo y S un subconjunto multiplicativo. Muestre que, para todo par de A-módulos M, N hay isomorfismos naturales

$$\mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N)_S = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A_S}(M_S, N_S)$$