Álgebra Homológica

Lema de la serpiente - II

1. Completar la demostración del lema de la serpiente.

2. Interpretar los ejercicios de la lista "Lema de la serpiente 1" en términos del Lema de la Serpiente (o de su conclusión: la s.e.larga en homología). *Sugerencia: si $f : M_1 \to M_2$ es un morfismo de A-módulos, entonces se lo puede ver como un complejo "de largo 2"*

$$\cdots \to 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0 \to \cdots$$

y un morfismo de s.e.c. de A-módulos
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "f_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
se lo puede ver como una s.e.c. de complejos (verticales, de largo 2).

3. (naturalidad de δ) si
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddr, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[ddr, dashed] & 0 & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & Q \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & R \arrow[ddr, dashed] & & \\
 & & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & R' &
\end{tikzcd}$$
es un diagrama conmutativo con flechas horizontales exactas, y llamemos f a las flechas punteadas ($f_M \colon M \to M'$), entonces f induce un morfismo de s. exactas
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "f_X|"] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "f_Y|"] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_Z|"] & \mathrm{CoKer}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_P}"] & \mathrm{CoKer}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_Q}"] & \mathrm{CoKer}(\gamma) \arrow[d, "\overline{f_R}"] \\
\mathrm{Ker}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\gamma') \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{CoKer}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\gamma')
\end{tikzcd}$$

4. Definir morfismo entre sucesiones exactas cortas de complejos. Mostrar que si
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
es un morfismo de s.e.c. de complejos, entonces a, b, c, inducen morfismos de s.e. largas de sus homologías, es decir, un diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & H_n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H_n(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r] & H_n(Y') \arrow[r] & H_n(Z') \arrow[r] & H_{n-1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

5. Sea k un cuerpo y $A = k[x,y]$, $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ una s.e.c. de A-módulos y consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_1"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \oplus X \arrow[r, "f \oplus f"] \arrow[d, "d_2"] & Y \oplus Y \arrow[r, "g \oplus g"] \arrow[d, "d_2"] & Z \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $d_1(m) = (-ym, xm)$, $d_2(m, m') = xm + ym'$, $(m, m' \in X, Y, Z)$. Muestre que las filas son exactas y las columnas son complejos (i.e. $d_2 d_1 = 0$), por lo tanto se lo puede interpretar como una s.e.c. de complejos (los complejos escritos verticalmente)

$$“0 \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0''$$

Si definimos, para M un A-módulo, los invariante y coinvariantes respectivamente por

$$M^{x,y} := \{m \in M : x \cdot m = 0 = y \cdot m\}$$

$$M_{x,y} := \frac{M}{x \cdot M + y \cdot M}$$

entonces, para cada s.e.c. en ${}_AMod$ $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ $\exists$ una s.e.larga de la forma

$$0 \to X^{x,y} \to Y^{x,y} \to Z^{x,y} \to H^1_X \to H^1_Y \to H^1_Z \to X_{x,y} \to Y_{x,y} \to Z_{x,y} \to 0$$

donde H^1_M es el funtor que a un A-módulo M le asigna la homología del complejo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_1} M \oplus M \xrightarrow{d_2} M \longrightarrow 0$$

en el lugar donde está $M \oplus M$.

6. Sea $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, presentado como grupo abeliano libre con dos generadores g_1 y g_2. Si M es un $k[G]$-módulo, definimos una estructura de $k[x,y]$-módulo vía

$$x \cdot m = (1 - g_1) \cdot m, \qquad y \cdot m = (1 - g_2) \cdot m$$

Muestre que $M^{x,y} = M^G$ y que $M_{x,y} = M_G$. Explicitar lo más que pueda la s. exacta anterior relacionando G-invariantes y G-coinvariantes.

7. Consideremos un diagrama conmutativo con filas exactas de la forma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[d, "f_4"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \end{tikzcd}$$

Muestre que si f_2 y f_4 son monos y f_1 epi, entonces f es mono. Dualmente, si se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

con f_2 y f_4 epi, y f_5 mono, entonces f es epi. Concluir el siguiente:

8. (Lema de los 5) Si $f_{1,2,4,5}$ son isos, entonces f es iso.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

(Ver Ejercicio 4) Dado un morfismo de sucesiones exactas cortas de complejos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si dos de las flechas a, b, c, inducen isomorfismo en homología, entonces la tercera también.

9. Sean ahora $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ una s.e.c. de complejo de COcadenas, es decir, $d(M^n) \subseteq M^{n+1}$, para $M = X, Y, Z$. Con el truco $\widetilde{M_n} := M^{-n}$ (o rehaciendo la demostración) muestre que esa s.e.c. induce una s.e.larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $H^n(M) = \dfrac{\operatorname{Ker}(d\colon M^n \to M^{n+1})}{d(M^{n-1})}$

10. (*En algún momento se requiere partición de la unidad*) Sea M una variedad diferenciable, $\Omega_c^k(M)$ las k-formas a soporte compacto, U y V dos abiertos de M tales que $V \cup U = M$. En general, si X es un abierto de M, identificamos $\Omega_c^k(X) \subset \Omega_c^k(M)$ como las formas de M con soporte contenido en X. Muestre que existe una sucesión exacta de complejos de De Rham (de formas a soporte compacto)

$$0 \to \Omega_c^\bullet(U \cap V) \to \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet V \to \Omega_c^\bullet M \to 0$$

y por lo tanto una sucesión exacta larga en H_c (donde H_c^n=$H^n(\Omega_c^\bullet)$= cohomologia de las formas a soporte compacto). Notar que la intersección y la unión están "al revés" con respecto a Mayer-Vietoris usual.

Por otro lado, la restricción a un abierto da morfismos $\Omega^k(M) \to \Omega^k(X)$ para cualquier abierto X, por lo tanto hay una sucesión de formas (no nec. a soporte compacto)

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) \to 0$$

que es exacta (la exactitud a izquierda es muy fácil, la exactitud a derecha necesita partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$). Deducir la sucesión exacta larga para cohomología de De Rham.

Complejos de cadenas

Si A es un anillo, Chain(A) denota la categoría de complejos de A-módulos (con diferenciales A-lineales y morfismos de complejos A-lineales).

1. Sea $f : (M, d) \to (N, \partial)$ un morfismo de complejos. Muestre que $(\mathrm{Ker}(f), 0)$ es un subcomplejo de (M, d), donde $Ker(f)_n = \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq M_n$. Muestre que la imagen (lugar a lugar) de f es un subcomplejo de (N, ∂) y que si definimos $\mathrm{CoKer}(f)_n := N_n/Im(f_n)$ entonces ∂ induce un diferencial $\overline{\partial}$ en $\mathrm{CoKer}(f)$, y éste tiene la propiedad universal del cociente. Es decir, para todo morfismo de complejos $g : (N, \partial) \to (W, d_W)$ tal que $fg = 0$, existe un unico $\overline{g} : (\mathrm{CoKer}f, \overline{\partial}) \to (W, d_W)$ morfismo de complejos con $\overline{g}\pi = g$.

2. Sea $f : M \to N$ (omitimos los diferenciales en la notacion) un morfismo de complejos.
   (a) Si f es monomorfismo (i.e. todas las f_n son monomorfismos) entonces Cono(f) es cuasi-isomorfo a $N/f(M)$.
   (b) Si f es epimorfismo, entonces Cono(f) es quasi-isomorfo a $\mathrm{Ker}(f)[-1]$

3. Muestre que Cono(Id) es contráctil.

4. Si (M, d_M) es un complejo de A-módulos a derecha (con d_M morfismos A-lineales) y (N, d_N) es un complejo de A-módulos a izquierda, muestre que

$$(M \otimes_A N)_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M_p \otimes_A N_{n-p}$$

   resulta un complejo (de grupos abelianos) con el diferencial dado por

$$d(x \otimes y) = d_M(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_N(y)$$

   donde $x \in M_p$ e $y \in N_{n-p}$. Muestre que la aplicación

$$H_p(M) \times H_q(N) \to H_{p+q}(M \otimes_A N)$$

dada por

$$([x],[y]) \mapsto [x \otimes_A y]$$

es bilineal y A-balanceada y por lo tanto induce un morfismo (natural)

$$\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(M) \otimes_A H_{n-p}(N) \to H_n(M \otimes_A N)$$

5. Sea $f : M \to N$ un morfismo de complejos, muestre que existe una sucesión exacta larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{f} H_n(N) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cono}(f)) \longrightarrow H_{n-1}(M) \xrightarrow{f} H_{n-1}(N) \longrightarrow \cdots$$

6. Consideremos un diagrama de A-modulos y morfismos A-lineales de la forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la fila de abajo es *exacta* (pero los Q no necesariamente proyectivos, y la fila de arriba es un complejo (no necesariamente exacto) donde los P_i son *proyectivos* para todo $i \geq 0$. Muestre que este diagrama se puede completar a un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

7. Recordemos que dos morfismos $f, g : M_\bullet \to N_\bullet$ (en $\mathrm{Chain}(A)$) se dicen homotópicos, y denotaremos $f \sim g$, si existe $h : M \to N$ A-lineal con $h(M_n) \subseteq N_{n+1}$ $\forall n$ (recordamos los diferenciales verifican $d(M_n) \subseteq N_{n-1}$) tal que $dh + hd = f - g$.

   (a) Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   (b) (compatibilidad con la suma) Si $f, g, f', g' : M \to N$ con $f \sim g$ y $f' \sim g'$, entonces $f + f' \sim g + g'$.

   (c) (compatibilidad con la composición) Si $f \sim f'$ y $T : N \to W$ y $S : X \to M$ son morfismos de complejos, entonces $TfS \sim Tf'S$. En particular (si f y g son componibles y) si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $fg \sim f'g'$.

   (d) Si se define $\mathrm{Obj}(\mathcal{H}(A)) = \mathrm{Obj}(\mathrm{Chain}(A))$, pero

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(X_\bullet, Y_\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}}(X_\bullet, Y_\bullet)/\sim$$

   entonces la composición $\mathrm{Chain}(A)$ induce en $\mathcal{H}(A)$ una composición, que hace de $\mathcal{H}(A)$ una categoría. Cualquier funtor F en $\mathrm{Chain}(A)$ que verifique $F(f) = F(f')$ para todo par f, f' con $f \sim f'$ (por ejemplo $X_\bullet \mapsto H_n(X_\bullet)$) se factoriza por $\mathcal{H}(A)$.