Álgebra Homológica

Proyectivos

1. Muestre que P es proyectivo si y sólo si toda sucesion exacta del tipo
$$0 \to X \to Y \to P \to 0$$
se parte.

2. Exiba sucesiones exactas cortas de modulos sobre algun anillo que no se partan (en particular habra exibido modulos no proyectivos).

3. Sea $F : A\text{-mod} \to Ab$ un funtor aditivo (i.e. $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$) y
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
una s.e.c. que se parte, mostrar que
$$0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$$
es exacta, mas aun: se parte.

4. P es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre, y si P es finitamente generado (f.g.) entonces es sumando directo de un libre f.g.

5. Si M es un A-modulo a izquierda entonces
$$M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$$
es un A-modulo a derecha via
$$(f \cdot a)(m) := f(am)$$

6. Sean P y N dos A-módulos y considere la siguiente aplicación
$$P^* \times N \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$$
$$(f, n) \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$
Muestre que es bilineal y A-balanceada, por lo tanto define un morfismo de gupos abelianos
$$P^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$$
$$f \otimes n \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$
Muestre que la clase de módulos P tal que la aplicación anterior es un iso para cualquier N es cerrad por sumas directas finitas y sumandos directos. Muestre que esa clase contienen a $P = A$. Concluya que para todo proyectivo de tipo finito P, la aplicación anterior es un iso.

7. Sea P proyectivo f.g. y $p_1, \cdots p_n$ un sistema de generadores. Muestre que existen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in P^*$ tales que para todo $x \in P$ vale
$$x = \sum_i \phi_i(x) p_i$$
es decir, $\mathrm{Id} = \sum_i \phi_i \otimes_A p_i \in P^* \otimes P \cong \mathrm{End}_A(P)$

8. Muestre que si Id_M esta en la imagen de $M^* \otimes_A M \to \mathrm{End}_A(M)$ entonces M es proyectivo de tipo finito.

9. Sea $A = k[x]$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

10. Sea $A = k[x]/(x^2)$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

11. Sea $A = k[x]/(x^N)$ con $N \geq 2$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

12. Sea $A = k[x, y]$, muestre que la siguiente es una sucesion exacta
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_2} A \oplus A \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\pi} A/(x, y) \longrightarrow 0$$
donde $d_2(p) = (yp, -xp)$ y $d_1(p, q) = xp + yq$.

Inyectivos

1. Muestre que I es inyectivo si y solo si toda sucesion exacta del tipo
$$0 \to I \to X \to Y \to 0$$
se parte. Obserar que el ejercicio 2 de la seccion anterior exhibe modulos no inyectivos.

2. Sea A un anillo, probar que son equivalentes

    - Todo A-modulo es proyectivo.

- Todo A-modulo es inyectivo.

3. Sea A un dip (dominio de ideales principales), muestre que I es inyectivo si y solo si es A-divisible (i.e. para todo $x \in I$, si $a \in A \setminus \{0\}$ entonces existe $\widetilde{x} \in I : a\widetilde{x} = x$). En particular si K es el cuerpo de fracciones de A, K es A-inyectivo, tambien K/A.

4. Sea $A = k[x]$ y $I = k[t]$ como espacio vectorial, con la estructura de $k[x]$-modulo dada por
$$x \cdot t^n = t^{n-1} \text{ si } n > 0 \text{ y } x \cdot 1 = 0$$
Muestre que I inyectivo. Observar que $k = k[x]/(x) \hookrightarrow I$ como $k[x]$-modulo.

5. Sea k un cuerpo y A una k-algebra, si M es un A-modulo a derecha, se define el A-modulo a izquierda
$$M' := \mathrm{Hom}_k(M, k)$$
(no confundir con $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$) con la estructura de A-modulo (a izquierda) dada por
$$(a \cdot \phi)(m) := \phi(ma)$$
Mostrar que si M es A-playo (en particular si M es proyectivo, o libre), entonces M' es inyectivo.

6. Sea $A = k[x]$, muestre que si $M = k[t]$ como en el ejercicio 3, entonces M se identifica con un submodulo de A'.