Álgebra Homológica

Producto tensorial

1. Muestre que la multiplicación $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ induce un isomorfismo $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$ ($a \otimes b \mapsto ab$).

2. Si M es un grupo abeliano, $\mathbb{Z}_p \otimes M \cong M/pM$.

3. Muestre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Muestre que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible (y de torsión).

4. Sea T un grupo abeliano de torsión y D divisible, mostrar que $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$. Mostrar que si T tiene p-torsión y la multiplicación por $p.: D \to D$ es sobreyectiva (D es p-divisible) entonces también $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$

5. Sea A un anillo íntegro, muestre que M es un A-módulo divisible y sin torsión si y sólo si es un K-espacio vectorial (K=cuerpo de fracciones de A).

6. Sea A un anillo que es subanillo de B, M_B, ${}_BN$ dos B-módulos, muestre que

$$M \otimes_B N = (M \otimes_A N)/\langle mb \otimes_A n - m \otimes_A bn : m \in M,\ n \in N,\ b \in B\rangle$$

7. Si M es un $k[x]$-módulo y k es el $k[x]$-módulo dado por $x.\lambda = 0$ ($\lambda \in k$), entonces

$$k \otimes_{k[x]} M \cong M/xM$$

8. Sea V es k-espacio vectorial de dimensión finita, $f \in \mathrm{End}_k(V)$ y M el $k[x]$-módulo dado por V y f. Sea $\lambda_0 \in k$ y $k_{\lambda_0} = k$ como espacio vectorial pero con la estructura de $k[x]$-módulo dada por $p(x).1 = p(\lambda_0)$. Mostrar que

   (a) Si λ_0 NO es autovalor de $f \Rightarrow k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M = 0$. Compare con ejercicio 5.

   (b) Asumamos f diagonalizable y λ_0 un autovalor, entonces $k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M \cong V_{\lambda_0}$ (el subespacio de autovectores de autovalor λ_0).

   (c) Si f no es diagonalizable pero λ_0 es autovalor, entonces $k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M$ calcula el subespacio de autovectores de autovalor λ_0 o el subespacio de $(x - \lambda_0)$-torsión?

9. Si A es subanillo de B (o si se tiene dado un morfismo de anillos $f: A \to B$) y ${}_AM$ es un A-módulo, se define la *extensión de escalares* como $B \otimes_A M$. Muestre que si N es un B-módulo (en particular es A-módulo, via $a \cdot n = f(a)n$) entonces

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

10. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. se define $V[i] := V \oplus Vi$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con la estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial dada por, si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $w = u + vi$,

$$z \cdot w := (au - bv) + (av + bu)i$$

Muestre que esta construcción es funtorial (entre la categoria de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y la de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Muestre que $V[i] \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.

11. Sea W un $\mathbb{C}$-espacio vectorial provisto de una involución σ, es decir, $\sigma : W \to W$ es $\mathbb{R}$-lineal, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$, y $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma w$ si $w \in W$ y $z \in \mathbb{C}$. Muestre que, si $W^\sigma = \{w \in W : \sigma(w) = w\}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(W^\sigma) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$ y $W \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W^\sigma$, más aún, bajo esa identificacion, la involución de W se corresponde con la conjugación de $\mathbb{C}$ tensor la identidad de W^σ.

12. Si A y B son dos anillos, muestre que la formula

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb')$$

esta bien definida (como aplicación $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ y, en caso que $1_A \otimes 1_B \neq 0$, define una estructura de anillo en $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

13. Muestre que en la categoría de anillos conmutativos, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ es el coproducto. En la categoría de k-álgebras conmutativas, el coproducto es $A \otimes_k B$.

14. Muestre que $k[x, y] \cong k[x] \otimes_k k[y]$. Si G y H son grupos (o monoides con 1) $\Rightarrow k[G \times H] \cong k[G] \otimes_k k[H]$.

15. Muestre que el isomorfismo del ejercicio 1 ($\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$) es un iso de anillos.

16. Sean A, B, C anillos conmutativos y consideramos $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ como anillo. Muestre

$$\mathrm{Hom}_{anillos}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \cong \mathrm{Hom}_{anillos}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{anillos}(B, C)$$

17. Bajo la identificación B^{op}-módulos a izquierda $\equiv$ B-módulos a derecha muestre que

$${}_A\mathrm{mod}_B = {}_{A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{op}}\mathrm{mod}$$

18. Muestre que existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

19. Sea G grupo, V y W $k[G]$-módulos, entonces en $V \otimes W$ la formula $g \cdot (v \otimes w) := gv \otimes gw$ define una estructura de $k[G]$-módulo. Tambien $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ es $k[G]$-módulo via $(g \cdot \phi)(v) := g\phi(g^{-1}v)$. Muestre que si en k ponemos la acción trivial, entonces en particular V^* es un $k[G]$-módulo y el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$$

es de $k[G]$-módulos. Tambien $\mathrm{Hom}_{k[G]}(V, W) = (\mathrm{Hom}_k(V, W))^G$.

20. Diremos que M_A es A-playo si $M \otimes_A -$ es exacto.

(a) M_A es A-playo si y sólo si $M \otimes_A -$ preserva monomorfismos.

(b) Muestre que sumas directas de playos y sumandos directos de playos son playos.

(c) (Proyectivo implica playo) El módulo a derecha $M = A_A$ es A-playo, luego si M es A-proyectivo (visto como A-módulo a derecha) entonces es playo.

(d) Si A es integro y K su cuerpo de fracciones, entonces K es playo. Muestre que si $A \neq K$ entonces K no es proyectivo. (sugerencia, muestre que todo par de elementos de K son l.d. y use esto para ver que K no esta contenido en ningun A-libre salvo que $K = A$).

(e) S subconjunto multiplicativo de A, entonces $S^{-1}A$ es A-playo.

(f) (no tan facil) Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una s.e.c. de módulos sobre un anillo, si Y y Z son playos, muestre que X es playo. (un poco mas fácil) si X y Z son playos entonces Y es playo.