Lema de la serpiente - 1

1. Sea A un anillo, $g \in U(A)$, y M un A-módulo; definimos

$$M^g := \{m \in M : gm = m\}, \; M_g := M/\{m - gm : m \in M\}$$

   (a) Muestre que M es un $\mathcal{Z}_g(A)$-módulo, donde $\mathcal{Z}_g(A) = \{a \in A : ag = ga\}$.

   (b) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de A-módulos, muestre que

$$0 \to X^g \to Y^g \to Z^g \xrightarrow{\delta} X_g \to Y_g \to Z_g \to 0$$

   es exacta.

   (c) Si la multiplicación por g en M tiene orden finito n (por ejemplo si g tiene orden finito) y la multiplicación por n es inversible en M, muestre que la inclusión $M^g \to M$ compuesta con la proyección al cociente $M \to M_g$ da un isomorfismo

$$M^g \cong M_g$$

   (d) Si G es un grupo finito y $|G|$ es inversible en A entonces el funtor $(-)^G$ es exacto (i.e. manda sucesiones exactas cortas en exactas cortas)

2. A anillo, $D \in A$, M un A-modulo, se define

$$M^D = \{m \in M : Dm = 0\}, \; M_D = M/DM$$

   Muestre que M^D y M_D son modulos sobre $\mathcal{Z}_D(A) = \{a \in A : Da = aD\}$. Muestre que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de A-modulos, entonces

$$0 \to X^D \to Y^D \to Z^D \xrightarrow{\delta} X_D \to Y_D \to Z_D \to 0$$

   es exacta.

3. Sea A un dominio integro, K su cuerpo de fracciones, si M es un A-modulo se define

$$M_K = \left\{ \frac{m}{a} : m \in M, \; a \in A \setminus \{0\} \right\}$$

   $j_M : M \to M_K$ por $j(m) = \frac{m}{1}$, y

$$t(M) = \{m \in M : \exists a \in A \setminus \{0\} \text{ con } am = 0\}$$

   Mostrar que $t(M) = \mathrm{Ker} j_M$ y que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de A-modulos entonces existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \to t(X) \to t(Y) \to t(Z) \xrightarrow{\delta} X_K/j(X) \to Y_K/j(Y) \to Z_K/j(Z) \to 0$$

Funtores

Sean $F, G : C \to D$ dos funtores. Una *transformación natural* $\eta : F \to G$ es dar, para cada $X \in \text{Obj}(C)$, un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ (en D) que verifica que, para todo morfismo $f : X \to Y$ (en C), el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Si $\forall X \in \text{Obj}(C)$ resulta η_X un isomorfismo, η se dice un *isomorfismo natural.*

1. Muestre que $O_4 : Gr \to Sets$ dado por

$$O_4(G) = \{g \in G : g^4 = 1\}$$

(parte del ej es ver que es funtor) y $\text{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, -) : Gr \to Sets$ son naturalmente isomorfos. Mas precisamente,

$$\eta_G : O_4(G) \to \text{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, G)$$

definido por

$$\eta_G(g) = \text{ el unico morfismo } f : \mathbb{Z}_4 \to G \text{ determinad por } f(1) = g$$

es un isomorfismo natural de funtores.

2. (pares que conmutan) Sea $F : Gr \to Sets$ dado por

$$F(G) = \{(g, h) \in G \times G : gh = hg\}$$

es funtorial, es decir, si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces $(f(g), f(h)) \in F(G_2)$ si $(g, h) \in F(G_1)$. Muestre que este funtor es naturalmente isomorfo a (i.e. existe un isomorfismo natural con) $\text{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, -)$.

3. Se $F : Gr \to Sets$ dado por $F(G) = \{(g, h) \in G \times G : g^3 = 1,\ h^2 = 1,\ gh = hg^{-1}\}$. Es F de la forma $\text{Hom}_{Gr}(G_0, -)$ para algun grupo G_0?

4. Muestre que $j_M : M \to M_K$ es una transformacion natural entre Id y $(-)_K$.

5. Sea $f : X \to Y$ es un morfismo en una categoria C, entonces f induce una transformacion natural

$$f^* : \text{Hom}_C(N, -) \to \text{Hom}_C(M, -)$$

via

$$f^*_X : \text{Hom}_C(N, X) \to \text{Hom}_C(M, X)$$
$$\phi \mapsto \phi \circ_C f$$

Muestre que los funtores $\text{Hom}_C(N, -)$ y $\text{Hom}_C(M, -)$ son naturalmente isomorfos sí y sólo si M y N son isomorfos en C (i.e. existen morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $f \circ_C g = \text{Id}_N$ y $g \circ_C f = \text{Id}_M$).

6. Sea C una categoría tal que $\mathrm{Obj}(C)$ es un conjunto con un 'unico elemento $*$, muestre que $M := \mathrm{Hom}_C(*,*)$ es un monoide con neutro, y que dar funtor $C \to C$ es lo mismo que dar $f : M \to M$ un morfismo de monoides que preservan la unidad.

7. Si C y D son dos posets vistos como categorías, entonces un funtor $f : C \to D$ es lo mismo que una función monótona creciente $C \to D$.

8. Sea A un anillo y A-bimod la categoría de A-bimodulos. Muestre que

$$M^A := \{m \in M : am = ma \; \forall a \in A\}$$

es un funtor A-bimod$\to$ $Z(A)$-bimod, exacto a izquierda, es decir, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. entonces

$$0 \to X^A \to Y^A \to Z^A$$

es exacta. Es $(-)^A$ de la forma $\mathrm{Hom}_{A\text{-bimod}}(M_0, -)$ para algún bimodulo M_0?

9. Si $M \in A$-bimod, definimos

$$\mathrm{Der}(A, M) = \{D : A \to M : D(a+b) = D(a) + D(b), \; D(ab) = aD(b) + D(a)b\}$$

Muestre que $\mathrm{Der}(A, M)$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ y que $\mathrm{Der}(A, -) : A-$bimod$\to$ Ab es un funtor. Además, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de A-bimodulos,

$$0 \to \mathrm{Der}(A, X) \to \mathrm{Der}(A, Y) \to \mathrm{Der}(A, Z)$$

es exacta.

10. Si M es un A-bimódulo, consideramos el anillo

$$B = B(M) := A \oplus M$$

con la suma usual, es decir $(a+m)+(a'+m') = (a+a')+(m+m')$, y el producto dado por

$$(a+m)(a'+m') = aa' + am' + ma'$$

Notar que M se identifica con un subgrupo abeliano de B, que además es un ideal bilatero de cuadrado cero. Notar tambien que la proyección $\pi : B \to A$ es morfismo de anillos.

   (a) $B(-)$ es un funtor de la categoría de A-bimodulos en la categoría de anillos, y π es una transformacion natural entre $B(-)$ y el funtor constantemente A (el funtor que asigna A a todo bimodulo, y la identidad de A a toda flecha).

   (b) Muestre que $s : A \to B(M)$ es una sección de π que es morfismo de anillos sí y sólo si s es de la forma

   $$s(a) = a + D(a)$$

   con $D \in \mathrm{Der}(A, M)$.

11. (*) Sea M una variedad diferenciable compacta, mostrar que todo morfismo de anillos $\mathbb{R}$-lineal $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es de la forma ev_p para algún p, donde $ev_p(f) = f(p)$, es decir

$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R})$$
$$p \mapsto ev_p$$

Muestre además que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R}[x]/x^2) \cong TM$$