## Álgebra Homológica

# Invariantes y coinvariantes

Sea $k$ un anillo, $G$ un grupo, y $M$ un $k[G]$-módulo (es decir, un $k$-módulo providto de una acción de $G$ donde los elementos de $G$ actúan $k$-linealmente.

Definimos

$$(invariantes) \qquad M^G = \{m \in M : gm = m \forall g \in G\}$$

$$(coinvariantes) \qquad M_G = \frac{M}{\langle gm - m : m \in M, g \in G \rangle}$$

1. Si $0 \to M \to N \to T \to 0$ es una s.e.c. de $k[G]$-módulos, entonces quedan inducidas sucesiones exactas
$$0 \to M^G \to N^G \to T^G$$
y
$$M_G \to N_G \to T_G \to 0$$

2. A partir de ahora $G$ es finito. Muestre que $p_G := \sum_{g \in G} \in k[G]$ define una aplicación
$$M \to M^G$$
$$m \mapsto \sum_{g \in G} gm$$
que se factoriza a través de $M_G$, es decir, que queda bien definida una aplicación
$$\overline{p} : M_G \to M^G$$
$$\overline{m} \mapsto \sum_{g \in G} gm$$

3. Qué significaría que $\overline{p} : (-)^G \to (-)_G$ sea una transformación natural entre los funtores coinvariantes e invariantes? Es $\overline{p}$ una transformcion natural?

4. Muestre que si $n = |G|$ es inversible en $k$ entonces $\overline{p}$ es una biyección para todo $M$. Concluya que en ese caso $(-)^G$ resulta un funtor exacto, o sea
$$0 \to M^G \to N^G \to T^G \to 0$$
es exacta para toda s.e.c. $0 \to M \to N \to T \to 0$