Álgebra Homológica

Categorias, egalizador, coegalizador, límites y colímites

1. Leer la definición de egalizador y coegalizador.
   - Mostrar que en Sets, el egalizador de $f, g : X \to Y$ esta dado por (la inclusión de) el subconjunto de X en donde las funciones coinciden, y el coegalizador está dado por (la proyección a) el cociente de Y por la relación $f(x) \sim g(x)$, $\forall x \in X$.
   - Calcular egalizador y coegalizador en grupos abelianos.
2. Mostrar que p es el coegalizador de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} Z$$

   si y solo si, para todo objeto W, el siguiente es un diagrama de egalizador en Sets:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}(Y, W) \underset{g^*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

3. Dualmente, mostrar que i es el *coegalizador* de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$

$$Z \xrightarrow{i} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

   si y solo si, para todo objeto W, el siguiente es un diagrama de *egalizador* en Sets:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(W, X) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$$

   Observación: tanto en el caso de egalizador como de COegalizador, al tomar Hom, como en uno es en una variable y en el otro caso en la otra, ambos se traducen a egalizadores en Sets.

4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría donde existen coproductos arbitrarios y coegalizadores. Sea $(I, \leq)$ un poset y $(X_i \overset{\iota_{ij}}{\to} X_j)_{i \leq j}$ un sistema directo en $\mathcal{C}$. Consideramos $\coprod_I X_i$ (existe por hipótesis). Notar que para cada $i \leq j$, el siguiente diagrama NO necesariamente conmuta

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_i"'] & X_j \arrow[r, "\iota_j"] & \coprod_I X_i \end{tikzcd}$$

   Llamemos $f_{ij} := \iota_j \circ \iota_{ij}$. Como para cada $i \leq j$ estan definidos

$$X_i \xrightarrow{f_{ij}} \coprod_I X_i$$

$$X_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_I X_i$$

la propiedad universal del coproducto (no sobre I sino sobre todos los pares (i,j) tales que $i \leq j$) determina un único morfismo para las f_i

$$f : \coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

y otro único morfismo para las ι_i

$$\iota : \coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

Muestre que el coegalizador de f y ι tiene la propiedad universal del colimite:

$$\coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i \underset{\iota}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_I X_i \xrightarrow{p} \lim_{\to I} X_i \ := Coegalizador(f,\iota)$$

Las flechas $X_i \to \lim_I X_i$ estan dadas por la composición de la flecha correspondiente a $i \leq i$ que va de X_i en $\coprod_{\{(i,j):i \leq j\}} X_i$, compuesta con f (o con ι, da lo mismo!) y compuesta con p.

5. Dualmente, muestre que si $\mathcal{C}$ es una categoría donde existen productos arbitrarios y egalizadores, entonces existen limites inversos arbitrarios. *sugerencia: dar vuelta las flechas y comparar lo que se tiene con la descripción del límite inverso en Sets (que está hecho en el beamer).*