Álgebra Homológica

El objetivo es demostrar este

Teorema: *(M. Van den Bergh) Sea A una k-álgebra que admite una resolución A^e proyectiva $P_\bullet \to A$ con P_n finitamente generado (como A^e-módulo) $\forall n$. Son equivalentes*

i) $pdim_{A^e}(A) = d$ y

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} A & \text{si } n = d, \text{ iso como } A^e\text{-módulo} \\ 0 & \text{si } n \neq d \end{cases}$$

ii) $\exists d \in \mathbb{N}$ y un isomorfismo (de k-módulos) natural en M

$$H^\bullet(A, M) \cong H_{d-\bullet}(A, M)$$

para todo A-bimódulo M.

Una k-álgebra satisfaciendo alguna de estas condiciones se denomina Calabi-Yau.

Van den Bergh mostró un teorema un poco más general, con $\mathrm{Ext}_{A^e}(A, A^e) \cong U \in Pic_k(A)$, del cual $U = A$ es un caso particular, y $U = A_\phi$=el bimódulo A con acción de un lado torcida por un automorfismo de A se denomina *twisted Calaby - Yau*. Una k-álgebra que satisface el teorema general se dice que verifica la dualidad de Van den Bergh. Esta versión (y su demostración) se recoge la idea principal del teorema de Van den Bergh.

Obs: Cualquiera de esas condiciones equivalentes implican a su vez que A tiene dimensión global finita, por lo tanto, en el caso conmutativo y característica cero implica suavidad.

1. Sea A un anillo, $M \in {}_AMod$ y $N \in {}_AMod_B$. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es naturalmente un B-módulo a izquierda. Concluya que $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ hereda una estructura de B-módulo a izquierda. Si $b \in B$ y r_b es la multiplicación a derecha en N:

$$r_b : N \to N$$

$$x \mapsto xb$$

   r_b es A-lineal a izquierda y por la funtorialidad de Ext se tiene una flecha

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, r_b) = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$$

   Muestre que la estructura de B-módulo a izquierda está dada justamente por la flecha anterior, es decir, para cada $b \in B$,

$$b \cdot - = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$$

2. Sea A una k-álgebra, usando que A^e es un A^e-BI-módulo, muestre que $H^\bullet(A, A^e) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A^e)$ es un A-bimódulo.

3. $ii) \Rightarrow i)$. Consideremos el caso $M = A^e$:

$$H^\bullet(A, A^e) \cong H_{d-\bullet}(A, A^e)$$

Como

$$H_{d-\bullet}(A, A^e) = \mathrm{Tor}_{d-\bullet}(A, A^e)$$

y A^e es A^e-libre, luego proyectivo, luego playo,

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = H^\bullet(A, A^e) \cong \mathrm{Tor}_{d-n}(A, A^e) = 0 \forall n \neq d$$

y para $n = d$

$$\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{Tor}_0^{A^e}(A, A^e) = A \otimes_{A^e} A^e \cong A$$

El isomorfismo en principio es como k-módulo. Utilice la naturalidad y la estructura de A^e-módulo a derecha de A^e para concluir que el isomorfismo es de A^e-módulos.

Por otra parte, como $H_n(A, M) = 0$ para $n < 0$, si $H^n(A, M) \cong H_{d-n}(A, A^e)$ entonces $H^n(A, M) = 0$ para $n > d$. Por otra parte $H^d(A., A^e) \neq 0$ luego $pdim_{A^e}(A) = d$.

4. $i) \Rightarrow ii)$ sea

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

una resolución proyectiva de A como A^e-bimódulo donde cada P_i es finitamente generado. Calculamos $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$ con una resolución así y obtenemos:

$$H^n(A, M) = H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P_\bullet, M), d^*)$$

y como los P_i son A^e-proyectivos de t.f.

$$\cong H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e) \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M)$$

Pero $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = 0$ salvo $n = d$,

$$\Rightarrow \;\; H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e)) = 0$$

si $n \neq d$ y $\cong A$ si $n = d$, eso significa que el complejo

$$0 \to P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_d^* \to 0$$

es exacto en todos lados salvo al final, y que el conúcleo de $P_{d-1} \to P_d$ es iso a A. O sea, salvo lugar desde donde se cuentan los grados, es una resolución proyectiva de A, pues P_i^* es A^e proyectivo. Llamemos $Q_i := P_{d-i}$, entonces tenemos

$$0 \to Q_d^* \to Q_{d-1}^* \to \cdots \to Q_0^* \to 0$$

es una resolución A^e-proyectiva de A y

$$H_n(Q_\bullet \otimes_{A^e} M) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, M) = H_n(A, M)$$

luego

$$H^n(A, M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M) = H_n(Q_{d-\bullet} \otimes_{A^e} M) = H_{d-n}(A, M)$$

5. Si A y B son k-álgebras Calaby-Yau entonces $A \otimes B$ también (y la dimensión es la suma).

6. $A = M_n(k)$ es CY de dimensión 0. Luego, si A es CY, entonces $M_n(A)$ también es CY (de la misma dimensión).

7. Si A una k-álgebra CY y G es un grupo finito con $|G|$ inversible en $A[G]$, el álgebra de grupo, también es CY (de la misma dimensión).

8. Sea A una k-álgebra y M un A^e-módulo. Recordamos $M^A = \{m \in M : am = ma \forall a \in A\} = H^0(A, M)$ y $M_A = M/[A, M] = H_0(A, M)$. La composición
$$\begin{tikzcd} M^A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left] & M \arrow[r, two heads, "p"] & M_A \end{tikzcd}$$
define una transformación natural entre los funtores $(-)^A$ y $(-)_A$. Muestre que si esa transformación es un iso para todo M entonces necesariamente $H^1(A, M) = 0$ todo A^e-módulo M, o sea, $pdim_{A^e}(A) = 0$; en particular, si k es cuerpo, A debe ser semisimple.

Nota: Marcelo Aguiar mostró -entre otras cosas- en [*A note on strongly separable algebras*, Bol. A.N.C. (Córdoba, Argentina), vol 65 (2000) 51-60] que si k es cuerpo, $\dim_k A < \infty$ y la aplicación bilineal
$$A \times A \to k$$
$$(a, b) \mapsto tr(ab)$$
es no degenerada (donde $tr(a)$=traza del endomorfismo $x \mapsto ax$), entonces la transformación natural anterior $M^A \to M_A$ es un isomorfismo. O sea, A es CY de dimensión 0. También mostró que en característica cero, $M^A \to M_A$ es iso si y sólo si A es semisimple. Luego, $A = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ es CY de dimensión 0 (si las D_i son álgebras de división de dimensión finita sobre k, por ejemplo, extensiones finitas de cuerpo). En consecuencia, si B es CY de dimesnión d, entonces $M_{n_1}(B \otimes_k D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(B \otimes_k D_k)$ es también CY (de la misma dimensión).

9. Sea $A = k[x]/(x^2)$.
$$\mathrm{Ext}^0_{A^e}(A, A^e) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong A$$
Use la resolución
$$\cdots \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{\quad m \quad} A \to 0$$
para mostrar que
$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0 \forall i > 0$$
Sin embargo $k[x]/x^2$ no es CY pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$.

10. Si A es CY y $S \subseteq A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado entonces A_S es CY (de la misma dimensión).

11. $k[x]$ es CY, luego $k[x_1, \ldots, x_n]$ también, y $k[\mathbb{Z}^n]$ también.

12. Si $G = \mathbb{Z}_p$ y k es un cuerpo de caracterísica p, entonces $A = k[\mathbb{Z}_p]$ no es CY, pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$ (notar que $A \cong k[x]/(x^p - 1)$, y si $t := x - 1$ entonces $A \cong k[t]/t^p$).