Categorías derivadas y categoría de homotopía

$\mathrm{Chain}(A)=$ la categoría de complejos de A-módulos
Definición: A anillo, $D(A)$ es la categoría que satisface

- hay un funtor canónico $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$ que verifica $Q(f)$ es un isomorfismo para todo q-iso f.
- Si $F : \mathrm{Chain}(A) \to \mathcal{C}$ es un funtor tal que $F(f)$ es un iso para todo q-iso f, entonces existe una única factorización

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C} \\
D(A) \arrow[ur, "\exists ! \widehat{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Claramente si existe una tal $D(A)$, es única a menos de isomorfismo (unico) de categorías.

Ejemplo:

$$H_\bullet : \mathrm{Chain}(A) \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$$

$$M \mapsto \{H_n(M)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

está definido en $D(A)$

Si A es s.s. $\Rightarrow H_\bullet(M)$ es q-iso a M, luego
$H_\bullet : D(A) \cong \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$

pero en general $D(A)$ no es una categoría abeliana, sino sólamente aditiva.

Hecho: $D(A) \iff A$ es ss.

Factorización por homotopía

Lema: sea $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$ el funtor canónico, si $f \sim_h g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$.

para esto veremos el cilindro

Mapping cylinder

Si $f : X \to Y$ se define

$$cyl(f) = X \oplus X[-1] \oplus Y$$

con diferencial

$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - fx')$$

y para un objeto, se define $cyl(X) = cyl(\mathrm{Id}_X)$

$i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ es un morfismo de complejos,

también $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$.

$$p : cyl(X) \to X$$
$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$

si es un morfismo de complejos.

Claramente

$$p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$$

Además: tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

demostracion: Veamos

$$(i_1 \circ p)(x, x', x'') = i_1(x + x'') = (x + x'', 0, 0)$$

$$(i_1 \circ p - \mathrm{Id})(x, x', x'') = (x + x'', 0, 0) - (x, x', x'') = (x'', -x', -x'')$$

Definimos $h(x, x', x'') = (0, x'', 0)$, entonces

$$(dh + hd)(x, x', x'') = d(0, x'', 0) + h(dx + x', -dx', dx'' - x')$$

$$= (x'', -dx'', -x'') + (0, dx'' - x', 0) = (x'', -x', -x'')$$

Para $i_2 \circ p$ lo dejamos como ejercicio.

Si $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos, entonces $f, g : X \to Y$

$$f := \phi \circ i_1, \quad g := \phi \circ i_2$$

son dos morfismos de complejos.

$$\begin{aligned}\phi(x, x', x'') &= \phi(x, 0, 0) + \phi(0, x', 0) + \phi(0, 0, x'') \\ &= f(x) + \phi(0, x', 0) + g(x'')\end{aligned}$$

Denotemos $h(x') = \phi(0, x', 0)$

Lema: ϕ es morfismo de complejos $\iff f \sim_h g$:

$$\phi d(x, x', x'') = d\phi(x, x', x'') \iff$$

$$\iff \phi(dx + x', -dx', dx'' - x') = d(f(x) + h(x') + g(x''))$$

$$\iff f(dx) + f(x') - hd(x') + gd(x'') - g(x') = df(x) + dh(x') + dg(x''$$

y como f y g son morfismos de complejos, $fd = df$, $gd = dg$,

$$\iff f(x') - hd(x') - g(x') = dh(x')$$

$$\iff f - g = hd + dh$$

Ahora tenemos $f \sim g : X \to Y$, consideramos $Q(f), Q(g) : Q(X) \to Q(Y)$. Fabricamos $\phi : cyl(X) \to Y$

$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$

$$f = \phi \circ i_1, \quad g = \phi \circ i_2$$

Notamos que i_1 e i_2 son equivalencias homotópicas, **ambas** con inversa homotópica $p \Rightarrow$ en $D(A)$ vale

$$\begin{aligned} Q(i_1) &= Q(i_2)Q(i_2)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\ &= Q(i_2)Q(p)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\ &= Q(i_2)Q(i_1)^{-1}Q(i_1)^{-1} = Q(i_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ Q(f) &= Q(\phi \circ i_1) = Q(\phi)Q(i_1) \\ &= Q(\phi)Q(i_2) = Q(\phi \circ i_2) = Q(g) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{tikzcd} \mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\ & \mathcal{H}(A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Estructura triangulada

El funtor de Traslación está bien definido en $D(A)$:

$$M \mapsto M[1]$$

claramente preserva q-iso, luego

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rrrr, bend left, "Q\circ[1]"] \arrow[ddr, "Q"'] & M \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & M[1] \arrow[r, mapsto] & Q(M[1]) & D(A) \\
 & & Q(M) \arrow[ur, mapsto, dashed] & & \\
 & D(A) \arrow[uurrr, dashed, "[1]"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Mapping cone

Llamaremos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna

$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$

que sea isomorfa a un cono: a toda terna t.q.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "a[-1]"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados conmutan a menos de homotopía y a, b, c son equivalencias homotópicas.
Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial

$$\partial(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$

$M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1]$ lo llamaremos *distinguido*.

Los **triángulos en** $D(A)$ son la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

Obs: En la factorización $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\
& \mathcal{H}(A) \arrow[ur, "\widetilde{Q}"'] &
\end{tikzcd}$$

el funtor $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ manda triángulos en triángulos.

Propiedades de los triángulos

T1: $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ y $D(A)$

T2: Si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1] \xrightarrow{-u} Y[-1])$$

y

$$(Z[1] \xrightarrow{-w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

también lo son.

Dem. suponemos
$(X \to Y \to Z \to X[-1]) = (M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1])$,
consideramos

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & N \oplus M[-1] \arrow[r] & M[-1] \arrow[r, "-f"] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

$$Co(i) = Co(f) \oplus N[-1] = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & N \oplus M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "i_f"] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & Co(f) \arrow[r] & Co(i) \arrow[r] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

Para que el cuadrado de la derecha conmute, definimos $i_f(m) = (0, m, -f(m))$ y vemos que el cuadrado del medio no conmuta...

$$
\begin{tikzcd}
 & & m \arrow[drr, mapsto, bend left] \arrow[dddd, mapsto, bend left] & & \\
(n,m) \arrow[d, mapsto] \arrow[urr, mapsto, bend left] & N \oplus M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "i_f"] & N[-1] \arrow[d, equal] & -f(m) \arrow[dd, mapsto] \\
(n,m) \arrow[drr, mapsto, bend right] & N \oplus M[-1] \arrow[r] & N \oplus M[-1] \oplus N[-1] \arrow[r] & N[-1] & \\
 & & (n,m,0) & & -f(m) \\
 & & (0,m,-f(m)) \arrow[urr, mapsto] & &
\end{tikzcd}
$$

sin embargo, si $\phi, \psi : Co(f) \to Co(i)$ están definidas por

$$\phi(n,m) = (n,m,0)$$

$$\psi(n,m) = (0,m,-f(m))$$

$\phi \sim_h \psi$ via $h(n,m) = (0,0,n)$:

$$(hd + dh)(n, m) = h(dn + f(m), -dm) + d(0, 0, n)$$
$$= (0, 0, dn + f(m)) + (n, 0, -dn)$$
$$= (n, 0, f(m)) = (n, m, 0) - (0, m, -f(m))$$
$$\therefore hd + dh = \phi - \psi$$

y el diagrama conmuta en $\mathcal{H}(A)$
A su vez, $i_f : M[-1] \to Co(i) = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$ no es un isomorfismo de complejos... sin embargo, si definimos $p : M : Co(i) \to M[-1]$ como la proyección en la coordenada $M[-1]$, claramente $p_M \circ i_f = \mathrm{Id}_{M[-1]}$. La otra composición da

$$i_f(p_M(n, m, n')) = i_f(m) = (0, m, -f(m))$$

y se tiene $i_f \circ p \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$ via

$$h(n, m, n') = (0, 0, n) :$$

$$(hd+dh)(n,m,n') = h(dn+f(m)+n', -dm, -dn') + \partial(0,0,n)$$

$$= (0,0,dn+f(m)+n') + (n,0,-dn) = (n,0,f(m)+n')$$

$$= (n,m,n') - (0,m,-f(m))$$

Es decir, $i_f \circ p_M \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$.

T3: Sea $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$ un diag. conmut. en $\mathrm{Chain}(A)$,

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, "b\oplus a"] & X[-1] \arrow[d, "a"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r] & Co(g) \arrow[r] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

es un morfismo de triángulos
dem: es claro que el diagrama conmuta, para ver que es morfismo de complejos:

$$(b \oplus a)d(y,x) = (b \oplus a)(dy + fx, -dx) = (bdy + bfx, -adx) =$$

$$d(b \oplus a)(y,x) = d(by, ax) = (dby + gax, -dax)$$

sabemos $ad = da$, $db = bd$,
y como el cuadrado riginal conmutaba, $bf = ga$.

Categorías triaguladas

Definición:(Verdier) Una categoría aditiva $\mathcal{T}$ se dice triangulada si tiene un autofuntor $M \mapsto M[1]$ y una clase distinguida de ternas $\{(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])\}$ satisfaciendo:

[T1] $\forall u : X \to Y$ existe un triángulo que empieza con u: $(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])$.

La terna $(X \stackrel{\mathrm{Id}}{\to} X \stackrel{0}{\to} 0 \stackrel{0}{\to} X[-1])$ es un triángulo,
la clase de triángulos es cerrada por isomorfismos de triángulos, i.e.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"', "\cong"] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"', "\cong"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1]
\end{tikzcd}$$

si la fila de arriba es un triángulo $\Rightarrow$ la de abajo también.

[T2] (rotación) si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ es un triángulo, sus "rotados"

$$(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1] \xrightarrow{-u} Y[-1]),$$

$$(Z[1] \xrightarrow{-w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

también lo son.

[T3](extensión de morfismos) Si se tienen dos triángulos como las filas, y el cuadrado de la izq. conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "\exists c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1]
\end{tikzcd}$$

entonces se puede extender a un morfismo de triángulos

[T4] El axioma del octahedro:
(No se conoce ejemplo de categoría aditiva que satisfaga T1 T2 T3 y no T4)
Consideremos dos flechas componibles:

$$X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z$$

y los completamos a triángulos

$$X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{i}{\to} Z' \stackrel{i'}{\to} X[-1]$$

$$Y \stackrel{g}{\to} Z \stackrel{j}{\to} X' \stackrel{j'}{\to} Y[-1]$$

$$X \xrightarrow{gf} Z \stackrel{k}{\to} Y' \stackrel{k'}{\to} X[-1]$$

los acomodamos en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, Rightarrow, "f"'] \arrow[dr, Rightarrow, "gf"] & & & \\
Y \arrow[rr, Rightarrow, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] & Y[-1] \\
Z' \arrow[d, "i'"] & & Y' \arrow[d, "k'"] & & \\
X[-1] & & X[-1] & &
\end{tikzcd}
$$

Entonces existen $u : Z' \to Y'$ y $v : Y' \to X'$ tales que el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

$$
\begin{tikzcd}
 & Y'[1] \arrow[rr, "k'[1]"] \arrow[dl, "v[1]"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
X'[1] \arrow[rr, "j'[1]"] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "{i[-1]}"] \\
 & & Z' \arrow[rr, Rightarrow, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"] & & Y' \arrow[r, Rightarrow, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & X' \arrow[r, "{j'i[-1]}"] & Z'[-1] \\
 & & & X[-1] & & &
\end{tikzcd}
$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$.

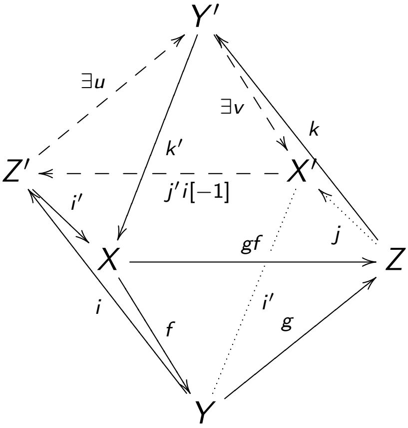
el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

$$\begin{tikzcd}
 & Co(gf)[1] \arrow[r, "{k'[1]}"] \arrow[dl, "{v[1]}"'] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
Co(g)[1] \arrow[r, "{j'[1]}"] & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & Co(g) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "{i[-1]}"] \\
 & Co(f) \arrow[rr, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"'] & & Co(gf) \arrow[r, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & Co(g) \arrow[r, "{j'i[-1]}"] & Co(f)[-1] \\
 & & X[-1] & & &
\end{tikzcd}$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$.
Si pensamos $Co(f) = Y/X$, $Co(gf) = Z/X$, $Co(g) = Y/Z$
entonces tendriamos $Y/Z = \dfrac{Y/X}{Z/X}$

La manera “octahedral”

al octahedro se le completa el triángulo de atrás, las caras son o bien triángulos o bien diagramas conmutativos:



$$iu = gk, \quad uk' = i', \quad kv = j, \quad k'f[-1] = vj'$$