ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Adicionales sobre el Cono y homotopia

1. Significado directo de "$Co(f)$ contráctil"

Supongamos dada $h : Co(f) \to Co(f)$ una homotopía de contracción h, es decir, h verfica $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$. Recordemos

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}, \qquad h(Co(f)_n) \subseteq Co(f)_{n+1}$$

$$\partial(x,m) = (dx + fm, -dm)$$

escribamos, para cada $(x,m) \in N_n \oplus M_{n-1}$

$$h(x,0) = (h_1 x, gx)$$

$$h(0,m) = (\phi m, h_2 m)$$

donde (para cada n)

$$h_1 : N_n \to N_{n+1}, \qquad h_2 : M_n \to M_{n+1}, \qquad g : N_n \to M_n, \qquad \phi : M_{n-1} \to N_{n+1}$$

Escribir explícitamente $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$ en términos de h_1, h_2, g y ϕ y concluir que $Co(f)$ contráctil equivale a que

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(N, M) : fg \sim \mathrm{Id} \text{ y } gf \sim \mathrm{Id}$$

y $\exists \phi : N \to M$ de grado 2 tal que $fh_2 + h_1 f = d\phi - \phi d$. En particular, M y N deben ser contráctiles (pero con homotopías que verifican una propiedad especial).

Los siguientes ejercicios tienen por objetivo final mostrar que si M y N son contráctiles, vía dos homotpías cualesquiera, entonces $Co(f)$ es contráctil, para cualquier $f : M \to N$.

La presentación está basada el una parte del Chp.3 (2.1 cycle operators, 2.4 Theorem, pp 75-76) del libro *Acyclic Models*, de Michael Barr, AMS, CRM (2017).

2. La recíproca

1. Sea $(M_\bullet, d)$ un complejo de A-módulos. Observar estas frases y convencerse de su equivalencia:

   (a) $M_\bullet$ es exacto.

   (b) para cada $m \in M_\bullet$ tal que $dm = 0$, existe m' con $m = dm'$.

   (c) Denotemos $Z_\bullet = \{m \in M : dm = 0\}$ los ciclos de M. Entonces, existe una forma de hacer corresponder a cada $m \in Z_\bullet$ un m' tal que $dm' = m$.

   (d) Existe una *función* (no necesariamente morfismo!) $Z_\bullet \to M_\bullet$, que a cada $m \in Z_\bullet$ le asigna m' tal que $dm' = m$.

   (e) Existe una *función* $z : Z_\bullet \to M_\bullet$ tal que $d \circ z = \mathrm{Id}_M$.

   No es de sorprender que la existencia de un tal z que sea morfismo se traduzca en una propiedad adicional de $M_\bullet$.

   Definición: Dado $M_\bullet$ un complejo de A-módulos, diremos que admite un **operador acíclico** si existe un **morfismo** $z : Z_\bullet(M) \to M_\bullet$ con $d \circ z = \mathrm{Id}_M$, donde $Z_\bullet(M)$=los ciclos de $M_\bullet$.

   Obs: en inglés se llama "cyclic operator", pero "operador cíclico" se le suele llamar a otra cosa (acción de un grupo cíclico, que quizás veamos mas tarde enel curso), por eso lo llamé acíclico, en vez de cíclico.

2. (fácil) Sea $M_\bullet$ contráctil, spongamos que h es una homotopía tal que $hd + dh = \mathrm{Id}_M$. Muestre que $z := h|_Z : Z_\bullet \to M_\bullet$ es un operador acíclico.

3. (más interesante) Proposición: Si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces es contráctil. *Demostración: Sea* $z : Z \to M$ *tal que* $zd = \mathrm{Id}_M$*, entonces*

   $$d = d \circ z \circ d$$

   o bien

   $$d \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d) = 0$$

   $\Rightarrow$ *la imagen de* $\mathrm{Id}_M - z \circ d$ *esta contenida en los ciclos, y se puede componer con* z*.*

   Se define $h : M \to M$ *vía*

   $$h := z \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d)$$

   Observar que la composición anterior tiene sentido, aún cuando "$z - z \circ z \circ d$*" no, pues* $z \circ z$ *(y por lo tanto* $z \circ z \circ d$*) no esta definido!*

   Muestre que h *sirve de homotopía de contracción.*

4. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A-Mod \to \mathbb{Z}-Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f+f') = F(f) + F(f')$. Si $(M_\bullet, d_M)$ es un complejo que admite un operador acíclico, entonces $(F(M_\bullet), F(d_M))$ tamién.

   En particular, para cada A-módulo C, si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces el complejo $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ también, donde

$$\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_A(C, M_n)$$

   y su diferencial es d_*. Concluimos que $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es necesariamente exacto.

5. (más interesante) Muestre que $M_\bullet$ admite un operador acíclico **si y sólo si** $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es exacto para todo A-módulo C.

   Sugerencia: ver el significado de que $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ *sea exacto para el caso*

$$C := Z_{n_0} = \mathrm{Ker}(d : M_{n_0} \to M_{n_0-1}) \subseteq M_{n_0} \subseteq M$$

   y el elemento i= la inclusión $Z_{n_0} \hookrightarrow M_\bullet$*, observar que* $d_*(i) = d \circ i = 0$*,*
   luego $i \in \mathrm{Hom}_A(Z_{n_0}, M_\bullet)_{n_0}$ *es un ciclo de ese complejo.*

6. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A-Mod \to \mathbb{Z}-Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f+f') = F(f) + F(f')$). Muestre que

$$F(Co(f)) = Co(F(f))$$

   En particular, para cualquier A-módulo C,

$$\mathrm{Hom}_A(C, Co(f)) = Co\Big(f_* : \mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet) \to \mathrm{Hom}_A(C, N_\bullet)\Big)$$

7. Muestre que si $M_\bullet$ y $N_\bullet$ son contráctiles y $f : M_\bullet \to N_\bullet$ es un morfismo cualquiera, entonces $\mathrm{Hom}_A(C, Co(f))$ es exacto para cualquier A-módulo C (sugerencia: use la sucesión exacta larga de $Co(f_*)$). Concluya que $Co(f)$ admite un operador acíclico y por lo tanto es necesariamente contráctil. Compare con la primera sección.