Álgebra Homológica

Adicionales Hochschild

y posibles temas de final

1. Sea M un A-bimódulo k-simétrico. Se define el complejo
$$C_n(A,M) = M \otimes A^{\otimes n} \ (n \geq 0)$$
con diferencial
$$b(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$
Muestre que
$$(C_\bullet(A,M), b) \cong M \otimes_{A^e} A \otimes A^\bullet \otimes A, \mathrm{Id}_M \otimes b')$$

2. Sea M un A-bimódulo k-simétrico. Se define
$$C^n(A,M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \ (n \geq 0)$$
con diferencial
$$\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) a_n$$
Muestre que
$$(C^\bullet(A,M), \partial) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^\bullet \otimes A, M), (b')^*)$$
En partirular, si A es k-proyectiva, entonces la (co)homología de estos complejos calculan $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A,M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A,M)$ respectivamente.

3. $H_0(A,M) = M/[A,M]$.

4. (Diferenciales de Kähler) Si A es conmutativo, muestre que la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ es morfismo de álgebras. Sea $I = \mathrm{Ker}(m)$ y definimos $\Omega_k(A) = I/I^2$.
   (a) $A \otimes A$ es un A-bimódulo no simétrico ($a \cdot (x \otimes y) \neq (x \otimes y) \cdot a$ en general). I es un sub-bimódulo, en general no simétrico, pero I/I^2 es un A-bimódulo A-simétrico ($a \cdot \omega = \omega \cdot a$, $\forall a \in A, \omega \in I/I^2$).
   (b) Sea $d : A \to A \otimes A$ definido por $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Muestre que d es una derivación, y que su imagen está contenida en I. Por abuso de notación llamamos con la misma letra $d : A \to \Omega_k(A)$ dada por $d(a) = \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$.

(c) Si $\sum_i a_i \otimes b_i \in I$, entonces $\sum_i a_i b_i = 0$. Utilice este hecho para mostrar que en $\Omega^1_k(A)$

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i d(b_i) = \sum_i d(b_i) a_i$$

En particular, la imagen de $d : A \to \Omega^1_k(A)$ genera $\Omega^1_k(A)$ como A-módulo.

(d) Consideramos $H_\bullet(A, A)$ calculado con la resolución standard. En lugar 1:

$$\cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 3} \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0$$

$$a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b$$

Notar que para A conmutativo, $b : A^{\otimes 2} \to A$ es cero. $H_1(A, A) = A^{\otimes 2}/b(A^{\otimes 3})$. Muestre que $ad(b) \leftrightarrow \overline{a \otimes b}$ está bien definida entre $\Omega^1_k(A)$ y $H_1(A, A)$ dando un isomorfismo

$$\Omega^1_k(A) \cong H_1(A, A)$$

(en particular $\overline{a \otimes 1} = 0 \in H_1(A, A)$)

5. *Propiedad universal de $\Omega^1_k(A)$.* Sea A una k-álgebra conmutativa y M un A-módulo a izquierda, que lo vemos como A-bimódulo (A-simétrico). Si $f : \Omega^1_k(A) \to M$ es un morfismo A-lineal, entonces $f \circ d : A \to M$ es una derivación k-lineal. Muestre que si $D : A \to M$ es una derivación k-lineal, entonces $\exists!$ morfismo A-lineal $\widetilde{D} : \Omega_1(A) \to M$ tal que $D = \widetilde{D} \circ d$. En diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_k(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

En el Hom: la composición con d induce una biyección (natural en M)

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_k(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A, M)$$

$$f \mapsto D_f = f \circ d$$

6. **Posible tema de final:** *Teorema de Hochschild - Kostant - Rosenberg: A esencialmente de t.f. y suave entonces $HH_\bullet(A) \cong \Omega^\bullet(A) := \Lambda^\bullet_A \Omega^1_k(A)$.*

7. (1-formas no conmutativas) Si A es una k-álgebra no necesariamente conmutativa se define

$$\Omega^{nc}_k(A) := \mathrm{Ker}(m : A \otimes A \to A)$$

como m es morfismo de A-bimódulos, es un A-bimódulo. Muestre que es k-simétrico y que $d : A \to \mathrm{Ker}(m)$ dado por

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$

es una derivación k-lineal. Por lo tanto, si M es otro A-bimódulo k-simétrico y $f : \Omega^{nc}_k(A) \to M$ es un morfismo de A-bimódulos, $f \circ d : A \to M$ es una derivación

k-lineal. Muestre que esta derivación $d : A \to \Omega^{nc}_k(A)$ es universal en el sentido que para todo A-bimódulo k-simétrico M, se tiene la propiedad universal

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_k(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{D}$ es morfismo de A-bimódulos. En términos de Hom: la composición con d induce una biyección (natural en los A-bimódulos k-simétricos M)

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^{nc}_k(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A, M)$$

$$f \mapsto D_f = f \circ d$$

8. **Posible tema de final:** *definición de separabilidad para extensiones generales (i.e. no nec. conmutativas), propiedades equivalentes y ejemplos.*

9. $H^0(A, M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \; \forall a \in A\}$.

10. $H^1(A, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)/Innder(A, M)$, donde $\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D : A \to M$ k-lineal$/D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a, b \in A\}$, $Innder = \{D : \exists m_0 \in M/D(a) = am_0 - m_0 a\}$.

11. Sea $C^n(A) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$. Definimos, para $f \in C^p(A)$, $g \in C^q(A)$, $f \cup g \in C^{p+q}(A)$ via

$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)g(b_1 \otimes \cdots \otimes b_q)$$

Muestre que es un producto asociativo en $C^\bullet(A) = \oplus_n C^n(A)$ y que

$$\partial(f \cup g) = \partial(f) \cup g + (-1)^p f \cup \partial(g)$$

En particular, $HH^\bullet(A) = \oplus_n H^n(A, A)$ es un álgebra asociativa graduada con el producto inducido por $\cup$. Por ejemplo, $HH^\bullet(A)$ es una $Z(A)$-algebra, pero también si D y D' son derivaciones, entonces $f(a \otimes b) := D(a)D'(b)$ es un 2-cociclo.

12. **Posible tema de final:** *El paper de Gerstenhaber ($HH^\bullet(A)$ es conmutativa en el sentido graduado), o el operad cactus = relación entre el producto $\cup$ y una estructura de Lie en $C^\bullet(A)$.*

13. **Posible tema de final:** *La acción de Aut(A) (y de InnAut), de* $\mathrm{Der}_k(A)$ *(y la de $InnDer(A)$). Aplicación cuando A es graduada y la derivación Euleriana es interior.*

14. **Posible tema de final:** *Invarianza Morita de $HH_\bullet$ y $HH^\bullet$, el grupo de Picard (y su acción en HH?) automorfismos y derivaciones en matrices.*