

ÁLGEBRA III

Práctica 4 – Segundo Cuatrimestre de 2007

Extensiones de Galois

- Hallar elementos primitivos de E/\mathbb{Q} , donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio:
 - $X^3 - 2$
 - $(X^2 - 3)(X^2 - 2)$
 - $X^4 - 2$
 - $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$
- Hallar un elemento primitivo de F_8/\mathbb{Z}_2 (F_8 denota al cuerpo de 8 elementos).
- Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K . Sean $E = K(u, v)$ y $F = K(u^p, v^p)$. Probar que $[E : F] = p^2$ y que E/F no admite un elemento primitivo. Determinar la clausura separable de F en E .
- Sea C una clausura algebraica de \mathbb{Z}_p y sea q un primo distinto de p . Sea L la unión de todos los subcuerpos K de C tales que $[K : \mathbb{Z}_p] = q^i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Probar que $[L : \mathbb{Z}_p] = \infty$ y que toda subextensión propia de L/\mathbb{Z}_p es monógena.
- Sea $E = \mathbb{C}(X)$. Consideremos los automorfismos r y s de E definidos por $s(X) = X^{-1}$ y $r(X) = wX$, donde w es una raíz n -ésima primitiva de 1. Probar que:
 - $r^n = s^2 = id_E$ y $rs = sr^{-1}$.
 - El subgrupo G generado por r y s es isomorfo a D_n .
 - $E^r = \mathbb{C}(X^n)$.
 - $E^s = \mathbb{C}(X + X^{-1})$.
 - $E^G = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.
- Sea K un cuerpo de q elementos y sea $E = K(X)$. Probar que:
 - $|G(E/K)| = q^3 - q$
 - $G(E/K)$ está generado por los automorfismos h_a, t_b e i (homotecias, traslaciones e inversión) definidos por
$$h_a(X) = aX, \quad a \in K - \{0\}; \quad t_b(X) = X + b, \quad b \in K; \quad i(X) = X^{-1}.$$
 - $E^{G(E/K)} = K(Y)$, donde $Y = \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$.
 - Calcule E^{G_h} y E^{G_t} donde G_h es el subgrupo generado por las homotecias y G_t el subgrupo generado por las traslaciones.
- Sean E/K y L/K dos extensiones finitas. Probar que si E/K y L/K son isomorfas entonces $G(E/K) \simeq G(L/K)$. ¿Vale la recíproca?
- Caracterizar los grupos de Galois de cada uno de los cuerpos de descomposición hallados en el Ejercicio 2 de la Práctica 3.

9. Sea $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$.
- Calcular $[E : \mathbb{Q}]$. ¿Es E/\mathbb{Q} una extensión normal?
 - Caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$ y las subextensiones de grado 2 de E/\mathbb{Q} .
10. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre \mathbb{Q} .
11. Determinar todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre \mathbb{Q} .
12. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y sean $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K . Si $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$, caracterizar $G(K[a, b]/K)$.
13. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.
- Sea E/K una extensión galoisiana tal que $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que $E = K[a, b]$ con $a^2, b^2 \in K$.
 - Generalizar el resultado del ítem i) para $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos).
14. Encontrar una extensión E/\mathbb{Q} tal que $G(E/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_6$.
15. Sea ξ_n una raíz primitiva n -ésima de la unidad y sea $c_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$. Sea K/\mathbb{Q} una extensión tal que c_n es irreducible en $K[X]$. Probar que $K(\xi_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y que $G(K(\xi_n)/K) \simeq \mathcal{U}_n$.
16. *a)* Considere $\mathbb{Q}(\xi_{11})$. Qué grado tiene sobre \mathbb{Q} ? Que grupos conoce de ese orden?
b) Considere la aplicación determinada por $\xi \mapsto \xi^2$. Compruebe que determina un elemento del grupo de Galois. Calcule el orden del elemento, y concluya sobre la estructura del grupo de Galois.
c) Probar que $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$. Observe que $\cos(\frac{2\pi}{11}) = \xi_{11} + \overline{\xi_{11}}$.
d) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.
17. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Probar que E/K tiene sólo dos subextensiones propias, calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.
18. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K , entonces es galoisiana.
19. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado $p^n s$ con $n \in \mathbb{N}$ y $(p, s) = 1$. Probar que:
- E/K tiene subextensiones de grado s , y dos de ellas son isomorfas.
 - Si $p > s$ hay una única subextensión de grado s que, además, resulta galoisiana.

20. i) Dada una extensión galoisiana E/K , probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).
- ii) Determinarla en el caso en que E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre \mathbb{Q} .
21. i) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K . Probar que E/K y F/K son abelianas (es decir, galoisianas con grupo de Galois abeliano) si y sólo si $E.F/K$ es abeliana.
- ii) Exhibir dos subextensiones de grado finito E/\mathbb{Q} y F/\mathbb{Q} de \mathbb{C}/\mathbb{Q} tales que $E.F/\mathbb{Q}$ sea galoisiana pero ni E/\mathbb{Q} ni F/\mathbb{Q} lo sean.
22. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea E/\mathbb{Q} un cuerpo de descomposición de f . Probar que $G(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.