Segundo Parcial - Algebra II

2do. cuatrimestre 2001

1. Sea A un anillo, supongamos que $A = \cup_{n\geq 0} F_n(A)$ donde $F_n(A)$ son subconjuntos de A que verifican

   - para todo n, $F_n(A)$ es un subgrupo abeliano de $(A, +)$.
   - para todo $n, m \geq 0$ vale la inclusión $F_n(A).F_m(A) \subseteq F_{n+m}(A)$.

   Nombre: En tales condiciones uno dirá que el anillo está **filtrado**.

   (a) Definimos el grupo abeliano $\mathrm{gr}(A) := \bigoplus_{n\geq 0} F_n(A)/F_{n-1}(A)$. Demuestre que la multiplicación de A induce una multiplicación en $\mathrm{gr}(A)$, por lo tanto $\mathrm{gr}(A)$ es un anillo.

   (b) Supongamos que $\mathrm{gr}(A)$ es un anillo noetheriano a izquierda, demuestre entonces que A es noetheriano a izquierda. Sugerencia: ver que si I es un ideal de A, entonces también está filtrado y $\mathrm{gr}(I)$ es un ideal de $\mathrm{gr}(A)$, y que la aplicación de los ideales de A en los ideales de $\mathrm{gr}(A)$ definida por $I \mapsto \mathrm{gr}(I)$ es inyectiva.

   (c) Sea k un cuerpo, $A = A_1(k)$ la subalgebra de $\mathrm{End}_k(k[x])$ generada por las transformaciones lineales $q =$"multiplicación por x", y $p =$"derivar". Definir una filtración en A tal que $\mathrm{gr}(A_1)$ resulte isomorfa a un anillo de polinomios en dos variables para concluir que A es noetheriano a izquierda. (y a derecha.)

2. Sean $\{M_n\}_{n\geq 0}$ una familia de A-módulos y para cada n, $f_n : M_{n+1} \to M_n$ un morfismo A-lineal. Se define

$$\varprojlim_m M_n := \left\{ (m_0, m_1, \dots, m_n, \dots) \in \prod_{n\geq 0} M_n \text{ tal que } f_n(m_{n+1}) = m_n \forall n \right\}$$

   Observar que la proyección $\prod_m M_m \to M_n$ define un morfismo $p_n : \varprojlim_m M_m \to M_n$.

   - Verificar que para todo n vale $p_n = f_n \circ p_{n+1}$. Demuestre que $\varprojlim_n M_n$ tiene además la siguiente propiedad universal:
     Si Z es un A-módulo, y $\{g_n : Z \to M_n\}$ es una familia de morfismos tales que para todo n, $g_n = f_n \circ g_{n+1}$, entonces existe un único morfismo A-lineal $g : Z \to \varprojlim_m M_m$ tal que para todo n, $g_n = p_n \circ g$.
   - Sea X un A-módulo y considerar para cada n el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathrm{Hom}_A(X, M_n)$ y los morfismos $(f_n)_* : \mathrm{Hom}_A(X, M_{n+1)} \to \mathrm{Hom}_A(X, M_n)$.
     Demostrar que $\mathrm{Hom}_A(X, \varprojlim_n M_n) \cong \varprojlim_n \mathrm{Hom}_A(X, M_n)$

3. Sea A un anillo, $S \subset \mathcal{Z}(A)$ un subconjunto multiplicativo. Demuestre que si M es A-proyectivo, entonces M_S es A_S-proyectivo.

4. Sea D un grupo abeliano divisible y sin torsión, A un grupo abeliano cualquiera, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ es divisible. Es necesaria la hipótesis "D sin torsión"?