Primer Parcial - Algebra II

2do. cuatrimestre 2001

1. (a) Sean K y H dos grupos, $\phi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ un morfismo de grupos, consideramos el grupo $H \rtimes K$ que como conjunto es el producto cartesiano de K por H, pero con la multiplicación

$$(h,k)(h',k') := (h\phi(k)(h), kk')$$

Demuestre que $\mathcal{Z}(H \rtimes K) = \{(h,k) \text{ tales que } k \in \mathcal{Z}(K),\ \phi(k) = h^{-1}. - .h, \text{ y } \phi(k')(h) = h\ \forall k' \in K\}$.

En particular, si H es conmutativo $\mathcal{Z}(H \rtimes K) = \{(h,k) \text{ tales que } k \in \mathcal{Z}(K),\ \phi(k) = Id_H, \text{ y } \phi(k')(h) = h\ \forall k' \in K\}$. Sugerencia: primero calcule los elementos de $H \rtimes K$ que conmutan con los elementos de la forma $(1,k)$.

   (b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$, k un cuerpo, $X = (k^{n\times m}, +)$, y se consideran los grupos $GL(n,k)$ y $GL(m,k)$. Sea $K := GL(n,k) \times GL(m,k)$. Ver que la acción de G sobre X definida por:

$$K \times X \to X$$
$$((A,B), M) \mapsto AMB^{-1}$$

es una acción de K por automorfismos de grupos de X. (Notar que X es un grupo conmutativo.) Con esta acción podemos considerar $X \rtimes K$. Sea ahora $G = \left\{ \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ tal que } A \in GL(n,k),\ B \in GL(m,k) \text{ y } M \in X \right\}$. Demuestre que $G \cong X \rtimes K$. Utilizando el ítem anterior calcular $\mathcal{Z}(G)$.

2. Sea A un anillo conmutativo, se define $J := \bigcap_{\mathcal{M} \text{ maximal}} \mathcal{M}$. Sea $x \in J$, demostrar:

   - $(1-x) \in \mathcal{U}(A)$.
   - Si $x^2 = x$ entonces $x = 0$.

3. Sea A un anillo, X, Y, Z y T cuatro A-módulos tales que existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to Y \to Z \to T \to 0$$

Demostrar:

   (a) Si X, Y y T son módulos noetherianos, entonces Z es noetheriano.

   (b) Si X, Z y T son módulos noetherianos, entonces Y es noetheriano.

4. (TCR.) Sea A un anillo conmutativo, a, b dos elementos de A tales que $\langle a,b\rangle = A$. Demostrar que $A/\langle ab\rangle \cong A/\langle a\rangle \oplus A/\langle b\rangle$. El isomorfismo es tanto de A-módulos como de anillos.