Algebra I
Segundo Cuatrimestre — 2006

Práctica 6: Números complejos

1. Hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-iz)$ y $\operatorname{Im}(iz)$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $z = (2+i)(1+3i)$;
   b) $z = 5i(1+i)^4$;
   c) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2(\overline{1-3i})$;
   d) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3$;
   e) $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{179}$;
   f) $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}[1+(2-i)^2]$.

2. Dados $z = 1+3i$ y $w = 4+2i$, representar en el plano los siguientes números complejos:

   a) z;
   b) w;
   c) $z+w$;
   d) $z-w$;
   e) $-z$;
   f) $\overline{z}$;
   g) $2z$;
   h) $\frac{1}{2}w$;
   i) $|z|$;
   j) $|w-z|$.

3. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

   a) $\{z \in \mathbb{C} : 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$;
   b) $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{y} |z| \leq 2\}$;
   c) $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$;
   d) $\{z \in \mathbb{C} : z.\operatorname{Im}(z)(1-i) = |z|^2\}$;
   e) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = |z-1-i|\}$.

4. Probar que:

   a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
   b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
   c) $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
   d) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
   e) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
   f) $z\overline{z} = |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
   g) $|zw| = |z|\,|w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
   h) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
   i) $|z+w| \leq |z| + |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
   j) $||z|-|w|| \leq |z-w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
   k) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
   l) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

   a) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{-1}$;
   b) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$;
   c) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$;
   d) $|z|^2 = (z+\overline{z}).\operatorname{Im}(z)$;
   e) $z^2 + |z^2| = i.\overline{z}$;
   f) $|z - \overline{z}| = \operatorname{Re}(z)$;

g) $i(z^2+4) = z.\operatorname{Im}(z)$;

h) $z^2 = 3+4i$;

i) $z \neq 0$ y $z-1 = z^{-1}$;

j) $z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$.

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

   a) $3+\sqrt{3}i$;

   b) $(2+2i)(\sqrt{3}-i)$;

   c) $(-1-i)^{-1}$;

   d) $(-1+\sqrt{3}i)^5$;

   e) $-\cos\frac{8}{3}\pi + i\sin\frac{8}{3}\pi$;

   f) $\cos\frac{4}{7}\pi + i\sin\frac{-4}{7}\pi$;

   g) $\cos\frac{11}{5}\pi - i\sin\frac{19}{5}\pi$;

   h) $\sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi$;

   i) $\cos\frac{55}{3}\pi - \sin\frac{56}{3}\pi$.

   j) $\cos\frac{55}{2}\pi - \sin\frac{56}{2}\pi$.

7. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

   a) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |z| \geq 2$ y $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$;

   b) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}$;

   c) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |z| < 3$ y $\arg(z^4) \leq \pi\}$.

8. *a)* Calcular $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.

   b) Calcular $(-1+\sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   c) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}i)$.

9. Calcular las raíces n-ésimas de z en los siguientes casos:

   a) $n = 6$, $z = 8$;

   b) $n = 4$, $z = -3$;

   c) $n = 7$, $z = -1+i$;

   d) $n = 11$, $z = \frac{2i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}i}$.

10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

    a) $z^4 = i\bar{z}^3$;

    b) $z^6 = (2-2i)^{10}$;

    c) $z^8 = \bar{z}^8$;

    d) $(z-1)^4 = (\bar{z}+i)^4$;

    e) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$;

    f) $(z+1)^4 = (z+i)^2$.

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{w \in \mathbb{C} : w^n = 1\}$. Probar que:

    a) G_n tiene n elementos;

    b) $z, w \in G_n \implies zw \in G_n$;

    c) $w \in G_n \implies w^{-1} \in G_n$;

    d) $w \in G_n \implies |w| = 1$;

    e) $w \in G_n \implies \overline{w} \in G_n$;

    f) $-1 \in G_n \iff n$ es par; y

    g) todo elemento de G_n es una potencia de $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que:

    a) $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$:

    b) $G_n \subseteq G_m \iff n \mid m$.

Definición: Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $w \in \mathbb{C}$. Diremos que w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si $w \in G_n$ y para todo $z \in G_n$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z = w^r$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

    a) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $k \in \mathbb{N}$ entonces w^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$;

    b) $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$.

14. Determinar las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $\overline{w}$ lo es.

16. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

    a) $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$;

    b) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad entonces $w^k = 1$ si y sólo si $n \mid k$.

17. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$.

    a) Calcular $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$ para cada $w \in G_n$. Deducir que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.

    b) Probar que el producto de todas las raíces n-ésimas de la unidad es $(-1)^{n-1}$

19. Calcular la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 15.

20. *a*) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

    b) Calcuar $w^{73} + \overline{w}.w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

    c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

    d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

21. Probar que si $w \in G_7$, entonces $\operatorname{Re}\big((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)\big) = 0$.

22. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad.

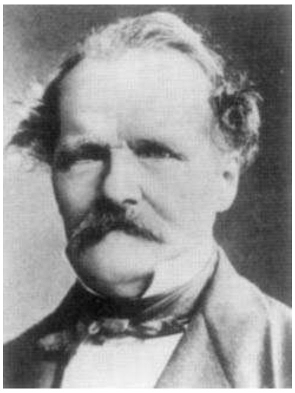
a) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$.

b) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$.

23. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w,$$
$$z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$.



Ernst Eduard Kummer
1810–1893, Alemania