Algebra I

Segundo Cuatrimestre — 2006

Práctica 5: Números enteros, II

1. *a*) Determinar cuántos divisores positivos tiene

   i) 9000;
   ii) $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$;
   iii) $10^n \cdot 11^{n+1}$;
   iv) $10^n \cdot 8^{n+1}$.

   b) Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $7^{435} \cdot 8^{23}$.

2. Hallar el menor número natural n tal que $6552n$ sea un cuadrado.

3. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan:

   a) $a^2 = 8b^2$;
   b) $a^2 = 3b^3$;
   c) $7a^2 = 11b^2$;
   d) $a^2 = 39b^2$.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$.

5. *a*) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a $77!$.
   b) Calcular la máxima potencia de 9 que divide a $77!$.
   c) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a $81!$.
   d) Calcular la máxima potencia de 24 que divide a $81!$.
   e) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 6 de $31!$.

6. Calcular $(18^n - 1 : 1292)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 2$. Calcular $(a^2 + b^2 : 84)$.

9. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$.

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$.

11. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos.

12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $[n : 130] = 260$.

13. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[a : b] = 1500$.

14. Hallar el resto de la división de a por p en los casos:

   a) $a = 33^{1427}$, $p = 5$;

b) $a = 71^{22283}$, $p = 11$;

c) $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$, $p = 13$.

15. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 2^p + 5$.

16. *a*) Resolver la ecuación de congruencia $2^{13} X \equiv 5 \pmod{11}$.

    b) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94} X \equiv 7 \pmod{97}$.

17. Sean p y q dos primos positivos distintos. Probar que si a es un entero coprimo con pq entonces $pq \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$.

18. Probar que si a es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$.

19. Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

    a) $728 \mid a^{27} - a^3$;

    b) $880 \mid a^{64} - a^4$;

    c) $\frac{2a^7}{35} + \frac{a}{7} - \frac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$.

20. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7^n \equiv 5 \pmod{13}$.

21. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{236} \equiv 6 \pmod{19}$.

22. Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

23. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$.

24. **24.** Sea p un primo, $p > 2$, y sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid a$. Probar que $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comparar con el ejercicio 19.*i)* de la práctica IV.

    Sugerencia: En el paso inductivo notar que

    $$a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p,$$

    y usar el ejercicio 8 de la práctica II.

25. *a*) Hallar el resto de la división de 3^{3603} por 5^3.

    b) Hallar el resto de la división de 7^{542} por 81.

26. Hallar todos los enteros a que satisfacen las condiciones

    $$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{8}; \\ a \equiv 2 \pmod{5}; \\ a \equiv 1 \pmod{21}. \end{cases}$$

27. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

    $$\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{10}; \\ a \equiv 2 \pmod{7}; \\ a \equiv 5 \pmod{9}. \end{cases}$$

28. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{6}; \\ a \equiv 2 \pmod{20}; \\ a \equiv 3 \pmod{9}. \end{cases}$$

29. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{12}; \\ a \equiv 7 \pmod{10}; \\ a \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

y, en caso afirmativo, hallarlos todos.

30. Sabiendo que los restos de la división de un entero a por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de a por 120.

31. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?

32. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

33. Hallar el menor entero positivo a que satisfaga *simultáneamente* las dos condiciones siguientes:

    a) el resto de la división de a por 21 es 13; y
    b) el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.

34. Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 sea 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 sea 8.

35. Calcular el resto de la división de $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56.

36. *a*) Hallar el resto de la división de $3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70.
    b) Hallar el resto de la división de 3^{385} por 400.
    c) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$.

37. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53 \pmod{77}$.

38. Hallar el resto de la división de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$.

39. *a*) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7.
    b) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$.
    c) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$.
    d) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de a por 70.
    e) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$.

f) Hallar todos los enteros positivos a tales que $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$.

g) Para cada entero a hallar $(a^{18} + 413 : 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3)$.

40. Hallar todos los divisores positivos de 25^{70} que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

41. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5^{n+1} - 9^n : 9^{n+1} + 39\, a\, 5^n) = 22$. Hallar el resto de la división de a por 44.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
1805–1859, Alemania