Grupos y Álgebras de Lie

Formas reales

1. Sea $\mathfrak{u}$ un álgebra de Lie real, y $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ su complexificado. Mostrar que "conjugar", $(u + iv \mapsto u - iv)$ induce una involución $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, es decir, un automorfismo de orden dos de álgebras de Lie reales con $\sigma(\lambda u) = \overline{\lambda}\sigma(u)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja. Diremos que $\mathfrak{u}$ es una *forma real* de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{u}$ es un álgebra de Lie real, y $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ como álgebras de Lie complejas. Mostrar que $\mathfrak{u}$ es forma real de $\mathfrak{g}$ si y sólo si existe una involución σ en $\mathfrak{g}$ (i.e. un automorfismo real de orden dos, conjugado-lineal) con $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma x = x\}$.
3. Sea V un espacio vectorial complejo y $\sigma : V \to V$ una involución. Es decir, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, es $\mathbb{R}$-lineal, y $\sigma(zv) = \overline{z}v$. Muestre que
   a) V^σ es un subespacio real, con $\dim_{\mathbb{R}} V^\sigma = \dim_{\mathbb{C}} V$.
   b) $S \subseteq V$ es un subespacio *complejo* de la forma $S_0 \oplus iS_0 = \mathbb{C}.S_0$ con S_0 un subespacio *real* de V^σ si y sólo si $\sigma(S) \subseteq S$.
4. Muestre que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2)$ son ambas formas reales de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Puede encontrar una involucion $\sigma : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ tal que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^\sigma = \mathfrak{su}(2)$?
5. Muestre que $\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{su}(p+q)$, y $\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$ son formas reales de $\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$. y $\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{R})$ son formas reales de $\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$.
6. Sea $\mathfrak{aff}(k) = kx \oplus ky$ el álgebra de Lie sobre k no abeliana de dimensión dos con corchete de Lie $[x,y] = y$. Como caso particular $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ es un álgebra compleja de dimensión dos, y $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ la misma álgebra pero considerada como álgebra real es un álgebra de Lie real de dimensión real 4. Es cierto que $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$?
7. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja, encuentre un isomorfismo explícito $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ como álgebra de Lie complejas (dos copias de $\mathfrak{g}$ que conmutan entre sí).
8. El objetivo de este ejercicio es mostrar el isomorfismo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{so}(1,3,\mathbb{R})$
   a) Sea $V = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : X = X^*\}$ el espacio vectorial *real* de matrices hermíticas $n \times n$. Si $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ y $X \in V$ muestre que $PXP^* \in V$, y que esa acción define un morfismo de grupos reales $\rho : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.
   b) Mostrar que $\mathrm{Ker}(\rho) = \{\lambda\mathrm{Id} : 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$ y que $\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \rho(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Concluya que $\mathrm{Ker}(\rho|_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})}) = G_n\mathrm{Id}$ donde G_n es el grupo de raices n-esimas de 1.
   c) Para $n = 2$, consideramos el isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}^4 \cong$ matrices hermíticas 2×2 dado por $(t,x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} t-z & x+iy \\ x-iy & t+z \end{pmatrix}$. Tomando determinante muestre que la imagen de $\rho|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ en realidad está contenida en $\mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$.
   d) Muestre que la aplicación $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$ es un difeo local (y por lo tanto su diferencial en la identidad es un isomorfismo).
   e) Encuentre la fórmula explícita del morfismo de grupos $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$, y una fórmula explícita del morfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(1,3,\mathbb{R})$.