Representaciones complejas de formas reales

1. Sea V un espacio vectorial real y W un espacio vectorial complejo, que en particular también lo vemos como espacio vectorial real. Muestre que

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

   es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, con $(z \cdot f)(v) := zf(v)$,

   y su dimensión es $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \dim_{\mathbb{R}} V \times \dim_{\mathbb{C}} W$

2. Sea V un espacio vectorial real, definimos su complexificado

   $$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$$

   como sumas formales $V \oplus iV = \{v + iv' : v, v' \in V\} \cong V \times V$ con la suma

   $$(v_1 + iv_1') + (v_2 + iv_2') := (v_1 + v_2) + i(v_1' + v_2')$$

   producto por reales

   $$x(v + iv') := xv + i(xv')$$

   y la estructura compleja determinada por

   $$i(v + iv') := -v' + iv$$

   Mostrar que la restricción de $V \oplus iV$ al (subespacio real) V determina una biyección (de hecho, isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales)

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V \oplus iV, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

3. Sea $\mathfrak{u}$ un álgebra de Lie real. Definimos en $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ la estructura de álgebra de Lie determinada por

   $$[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{u}} \ \forall x, y \in \mathfrak{u}$$
   $$[ix, y] = i[x, y] \ \forall x, y \in \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$$

   Mostrar que, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja, que la vemos -en particular- como álgebra real, entonces existe una biyección

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-Lie}(\mathfrak{u}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-Lie}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}, \mathfrak{g})$$

   donde Hom_{K-Lie} denota los morfismos de K-álgebras de Lie.

4. Sea $\mathfrak{u}$ un álgebra de Lie real y V un espacio vectorial complejo. Como siempre, consideramos $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ como álgebra de Lie (compleja) con el corchete dado como conmutador. Muestre que existe una biyección

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-Lie}(\mathfrak{u}, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-Lie}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))$$

   Concluya que es lo mismo dar una representación de $\mathfrak{u}$ en un espacio vectorial complejo, donde cada $\rho(x)$ es $\mathbb{C}$-lineal ($x \in \mathfrak{u}$), que dar una representación del álgebra de Lie $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}$.

5. Muestre que toda matriz de traza cero es suma de una hermítica mas una anti-hermítica (ambas de traza cero). Concluya que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ es, como espacio vectorial *real*, suma directa de $i\mathfrak{su}(n)$ y $\mathfrak{su}(n)$, y por lo tanto $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{su}(n)=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. (Además, $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}(n)=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.)

6. Claramente $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus i\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Concluya del ejericio anterior que las representaciones complejas de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ (es decir, los morfismos de álgebra de Lie reales de la forma $\rho\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-Lie}(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))$ están en biyección con las representaciones complejas de $\mathfrak{su}(n)$. Más precisamente, por cada espacio vectorial complejo V, existen biyecciones
$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-Lie}(\mathfrak{su}(n),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))\\ \cong\ &\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-Lie}(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{su}(n),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))\\ \cong\ &\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-Lie}(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))\\ \cong\ &\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-Lie}(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))\\ \cong\ &\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-Lie}(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V))\end{aligned}$$

Algunos isomorfismos

7. $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{R})\cong\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$, $\qquad\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{su}(p,q,\mathbb{R})\cong\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$.

8. $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})\cong\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$.

9. $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\times\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

10. $\mathfrak{so}(1,3)\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$.

11. Recordamos $\mathfrak{g}$ compleja simple, $\Rightarrow\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$=$\mathfrak{g}$ pero vista como álgebra real, es real simple.

12. $\mathfrak{so}(1,3)$ es simple.

13. Muestre un isomorfismo explícito (TCR!!) de álgebras asociativas $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Muestre que si $\mathfrak{g}$ es k-ágebra de Lie y A es k-álgebra conmutativa entonces $A\otimes_k\mathfrak{g}$ es de Lie con corchete
$$[a\otimes x,a'\otimes y]:=aa'\otimes[x,y]$$
Concluya que si $\mathfrak{g}$ es compleja $\Rightarrow$
$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}\cong(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}\cong(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$
A partir de un isomorfismo explícito $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, escriba un isomorfismo explícito $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$

14. $\mathbb{C}\otimes_R\mathfrak{so}(1,3)$ no es simple.