Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Clase 9:

Criterios de Cartan

Teorema (Criterios de Cartan)

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

a) *Criterio de solubilidad:*
   $\mathfrak{g}$ *es soluble* $\Leftrightarrow \kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$.

b) *Criterio de semisimplicidad:*
   $\mathfrak{g}$ *es semisimple* $\Leftrightarrow \kappa$ *es no degenerada.*

Corolario

$\mathfrak{g}$ *es "semisimple-bis" ($\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = 0$)* $\Rightarrow \mathfrak{g}$ *es producto de simples.*

dem del coro: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideal $\Rightarrow \mathfrak{h}^{\perp_\kappa}$ es ideal;
por el criterio $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ es ideal soluble,
$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = 0 \Rightarrow \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0 \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

b) (usando a), después demostramos a))
ss$\Rightarrow$ κ no deg:

$$\mathrm{rad}(\kappa) := \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, -) \equiv 0\} \leq \mathfrak{g}$$

es un ideal. En efecto,

$$\kappa([x, y], -) = \kappa(x, [y, -])$$

además, por a), $\mathrm{rad}(\kappa)$ es soluble.
$\therefore$ $\mathfrak{g}$ ss $\Rightarrow \mathrm{rad}(\kappa) = 0$.

ss$\Leftarrow$ κ no deg:

$\mathfrak{g}$ no ss $\Rightarrow$ admite un ideal soluble $\mathfrak{r}$
$\Rightarrow$ admite un ideal abeliano $0 \neq \mathfrak{a}$ (e.g. $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}^{(n-1)}$)

Veamos $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\kappa)$:
Si $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$ definimos $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ via

$$T := \operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y$$

$$z \in \mathfrak{g} \Rightarrow T^2(z) = [x, \overbrace{[y, \underbrace{[x,[y,z]]}_{\in\mathfrak{a}}]}^{\in\mathfrak{a}}] = 0$$

$\Rightarrow T^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(T) = 0$. Es decir,

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y) = \kappa(x,y), \forall x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{g}$$

i.e. $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\kappa) \Rightarrow \kappa$ es degenerada.

a) $\Rightarrow$)

$\mathfrak{g}$ soluble, $\mathfrak{g}$ actúa en $V = \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$.
Por el Teo de Lie, en una base, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_z \in \text{ triangulares superiores}$$

$$\mathrm{ad}_{[y,z]} = [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_z] \in \text{ triangulares superiores estrictas}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{[y,z]} \in \text{tringulares superiores estrictas}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_{[y,z]}) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

a) $\Leftarrow$) (del Humprheys)
basta ver $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es nilpotente.
Basta ver ad_x es nilpotente $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Lema

$A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ dos subespacios

$$M = \{m \in \mathfrak{gl}(V) : [m, B] \subseteq A\}$$

$x \in M$ satisface $\mathrm{tr}(xy) = 0 \forall y \in M \Rightarrow x$ es nilpotente.

con el lema, tomamos $A = \mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$, $B = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

$$M = \{m \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : [m, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}] \subseteq \mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\}$$

Notar $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq M$. La hipotesis es
$\mathrm{tr}(xy) = 0 \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$, pero necesitamos
$\mathrm{tr}(xy) = 0 \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in M$.

$$x = [x', x''],\ y \in M \Rightarrow \mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}([x', x'']y) \overset{Ej!}{=} \mathrm{tr}(x' \overbrace{[x'', y]}^{\in \mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}!}) = 0$$

dem del lema:

Lema: V un $\mathbb{C}$-esp. vec. $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ dos subespacios

$$M = \{m \in \mathfrak{gl}(V) : [m, B] \subseteq A\}$$

$x \in M$ satisface $\mathrm{tr}(xy) = 0 \forall y \in M \Rightarrow x$ es nilpotente.
Escribimos $x = s + n$ con s ss, n nilpo, y $sn = ns$.
veremos $s = 0$. Cambiamos de base y asumimos s diagonal

$$s = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\mathbb{E} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{Q}} = \sum_i \mathbb{Q} a_i$$

el $\mathbb{Q}$-e.v. generado por los a_i. Fijemos $f : \mathbb{E} \to \mathbb{Q}$ una transf. $\mathbb{Q}$-lineal Definimos

$$y := \mathrm{diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

Recordar que para una matriz diagonal $s = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$

$$\mathrm{ad}_s(E_{ij}) = (a_i - a_j)E_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ad}_y(E_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))E_{ij}$$

Sea $r \in \mathbb{C}[t]$ un pol. sin término cte que verifica

$$r(0) = 0, \;\; r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$$

(existe por interp. de Lagrange.) Como $r(0) = 0$, no tiene termino cte.

$$\Rightarrow r(\mathrm{ad}_s)(E_{ij}) = r(a_i - a_j)E_{ij} = (f(a_i) - f(a_j))E_{ij} = \mathrm{ad}_y(E_{ij})$$

$$\Rightarrow r(\mathrm{ad}_s) = \mathrm{ad}_y$$

Pero $s = P(x)$ (P pol sin termino cte)$\Rightarrow \mathrm{ad}_y$ es función de x (sin termino cte), digamos

$$\mathrm{ad}_y = F(\mathrm{ad}_x) = \alpha_1 \mathrm{ad}_x + \cdots + \alpha_k \mathrm{ad}_x^k$$

$$\mathrm{ad}_x^i(B) = \mathrm{ad}_x^{i-1}(\mathrm{ad}_x(B))$$

$$A \subseteq B, \quad M = \{m \in \mathfrak{gl}(V) : [m, B] \subseteq A\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ad}_x^{i-1}(\mathrm{ad}_x(B)) \subseteq \mathrm{ad}_x^{i-1}(A) \subseteq \mathrm{ad}_x^{i-1}(B) \rightsquigarrow \subseteq A$$

$$\Rightarrow y \in M$$

Ahora usando $\mathrm{tr}(xy) = 0$ tenemos

$$\sum_i a_i f(a_i) = 0$$

Notar los $f(a_i) \in \mathbb{Q}$, como f es $\mathbb{Q}$-lineal tambien tenemos

$$\sum_i f(a_i)^2 = 0$$

pero $f(a_i) \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(a_i) = 0 \forall i$. Como f arbitraria $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}, \mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \mathbb{E} = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall i$
$\Rightarrow s = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Rightarrow x = s + n = n.$

Corolario

Habiendo calculado κ para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2)$, vemos una segunda dem. de que son semisimples, y como no hay simples de dim 2, son simples.

Corolario

$\mathfrak{g}$ algebra d eLie compleja, $\mathfrak{g}_0$ una forma real: $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$. Entonces $\mathfrak{g}$ es ss $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ lo es

Ejercicio: $\mathfrak{g}$ compleja, definimos $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}$ pero vista como ágebra de Lie real. Entonces vale $\kappa_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}} = 2Re\kappa_{\mathfrak{g}}$.

Ejercicio: $\mathfrak{g}$ ss compleja $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ ss