GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE
1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 8:

Álgebras solubles: Teoremas de Lie y de Engel

Solubilidad (recuerdo)

La serie *derivada* de $\mathfrak{g}$ se define por

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}$$

y para cada $j \geq 1$

$$\mathfrak{g}^{(j+1)} := (\mathfrak{g}^{(j)})' = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}'' \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(j-1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \ldots$$

Se dice que $\mathfrak{g}$ es **soluble** si $\mathfrak{g}^{(j)} = 0$ para algún j.

Teorema

$\dim \mathfrak{g} = n$, *soluble* $\Rightarrow \exists$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = 0$$

con $\mathfrak{a}_{i+1} \leq \mathfrak{a}_i$ *ideal en* $\mathfrak{a}_i$, *y* $\dim(\mathfrak{a}_i / \mathfrak{a}_{i+1}) = 1$.

dem:

Teorema (Lie)

$\mathfrak{g}$ *soluble,*
$0 \neq V$ *una representacion,* $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$*,*
$\mathbb{K}$ *es alg. cerrado de característica cero.*
$\Rightarrow \exists 0 \neq v_0 \in V$ *tal que*

$$\rho(x)(v) = x \cdot v_0 = \lambda(x) v_0, \ \forall x \in \mathfrak{g}$$

es decir, existe un autovector simultáneo a todos los operadores de $\mathfrak{g}$*.*

Cambiamos $\mathfrak{g}$ por $\rho(g) \Rightarrow$ supondremos que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.
Inducción en $\dim \mathfrak{g}$.

$\dim \mathfrak{g} = 0$ ó 1 $\checkmark$

Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideal de codimensión 1
(e.g. cualquier subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codim 1, $\mathfrak{h} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus kx$$

HI$\Rightarrow \exists 0 \neq v_0 \in V$ tal que

$$hv_0 = \lambda(h)v_0, \forall h \in \mathfrak{h}$$

definimos

$$S := \{v \in V : hv = \lambda(h)v \forall h \in \mathfrak{h}\} \subseteq V$$

Notar $0 \neq v_0 \in S$.

Como $[x, h] \in \mathfrak{h}$, si $v \in S \Rightarrow$,

$$h(xv) = hxv - xhv + xhv = \overbrace{[h, x]}^{\in \mathfrak{h}} v + xhv$$

$$= \lambda([h, x])v + x(\lambda(h)v) = \lambda([h, x])v + \lambda(h)xv$$

Si fuera $\lambda([h, x]) = 0 \Rightarrow xv \in S$, i.e.

$$x|_S : S \to S$$

$\Rightarrow$ tiene al menos un autovector $0 \neq v_1 \in S$; este autovector sirve.

Veamos $\lambda([h, x]) = 0$:

Fijamos $v \in S$ y n el menor entero tal que $\{v, xv, x^2v, \ldots, x^{n-1}v\}$ es l.i.

Sea $W_i = \langle\{v, xv, x^2v, \ldots x^iv\}\rangle$.

$$hv = \lambda(h)v$$

$$hxv = (hx - xh + xh)v = \underbrace{[h, x]}_{\in\mathfrak{h}} v + xhv = \lambda([h, x])v + \lambda(h)xv$$

$$hx^2v = (hx - xh + xh)xv = \underbrace{[h, x]}_{\in\mathfrak{h}} xv + xhxv$$

$$= \underbrace{[h, x]}_{\in\mathfrak{h}} xv + (x[h, x] + xxh)v$$

$$= * * * * * + \lambda([h, x])xv + \lambda(h)x^2v$$

Un argumento inductivo (en i) nos muestra que

$$hx^iv = \lambda(h)x^iv + \text{ comb. lin. de los } x^jv \ (j < i)$$

La matriz de $h|_W$ en la base $\{v, xv, x^2v, \ldots, x^{n-1}v\}$ es

$$(h) = \begin{pmatrix} \lambda(h) & * & * & * \\ 0 & \lambda(h) & * & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda(h) \end{pmatrix}$$

Tomando traza:

$$n\lambda(h) = \mathrm{tr}_W(h|_W)$$

$$[h, x] \in \mathfrak{h} \Rightarrow n\lambda([h, x]) = \mathrm{tr}_W([h, x]|_W)$$

pero $h|_W$ y $x|_W$ son endomorfismo de W, luego

$$= \mathrm{tr}_W([h|_W, x|_W]) = \mathrm{tr}_W(h|_W x|_W - x|_W h|_W) = 0$$

pues $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$.
$\therefore \lambda([h, x]) = 0$ para todo $h \in \mathfrak{h}$ como queríamos.

Corolario

$\mathfrak{g}$, V y $\mathbb{K}$ como antes, entonces $\exists$ base de V t.q. las matrices de $\rho(x)$ son todas triangulares superiores.

Nilpotencia

La *sucesión central descendente de* $\mathfrak{g}$ se define por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}_{j+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{j-1} \supseteq \mathfrak{g}_j \supseteq \ldots$$

$\boxed{\mathfrak{g} \text{ es } \textbf{nilpotente} \text{ si } \mathfrak{g}_j = 0 \text{ para algún } j}$

Ejemplo: matices triangulares superiores estrictas.

Corolario

$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *soluble, entonces* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *es nilpotente.*

Teorema (Engel)

$0 \neq V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_K(V)$ una subálgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de V, entonces

1. *$\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente.*
2. $\boxed{\text{Existe } 0 \neq v_0 \in V \text{ tal que } xv_0 = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}}$
3. *Existe una base B de V tal que la matriz de x en la base B es triangular superior estricta para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Observación

$\mathfrak{g}$ nilpotente $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ es "ad-nilpotente", pues $\mathfrak{g}_n = 0$ entonces

$$[x_1, [x_2, [\dots [x_{n-1}, x_n] \dots] = 0$$

para toda upla $x_1, \dots, x_n$, en particular para
$x, x, x, x, \dots, x, y$,
es decir $\mathrm{ad}_x^n(y) = 0$ para todo y.

(1)

Lema

Si $x \in \mathfrak{gl}(V)$ es un endomorfismo nilpotente, entonces $[x, -] : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente.

dem: A anillo, $a, b \in A$ nilpotentes,

$$ab = ba \Rightarrow a - b \text{ es nilpo}$$

pues vale la fórmula del binomio de Newton.
Ponemos $A = \mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$, $a, b : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ dada por

$$a(f) = xf, \quad b(f) = fx$$

Es claro que a y b son nilpotentes y que $ab = ba$.

(2)

Teorema

Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, V de dimensión finita y $\mathfrak{g}$ consiste de endomorfismos nilpotentes, entonces

$$\exists v_0 \in V : xv_0 = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

Inducción en $\dim \mathfrak{g}$.

Buscamos un ideal de codimensión uno.
Sea $\mathfrak{h}_1$ una subálgebra propia cualquiera (por ejemplo, de dimensión uno!),

$\mathfrak{h}_1$ actúa de manera nilpotente vía ad, en $\mathfrak{g}$
y también en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$.

$$H.I. \Rightarrow \exists \overline{x_1} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 : \mathrm{ad}_h(\overline{x_1}) = 0, \ \forall h \in \mathfrak{h}_1$$

$\Rightarrow \exists x_1 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}_1 : [\mathfrak{h}_1, x_1] \subseteq \mathfrak{h}_1$
$\Rightarrow \exists$ una subálgebra más grande

$$\mathfrak{h}_2 := \mathfrak{h}_1 \oplus kx_1 : \mathfrak{h}_1 \overset{ideal}{\leq} \mathfrak{h}_2$$

Repetimos varias veces $\rightsquigarrow \mathfrak{h} \overset{ideal}{\leq} \mathfrak{g}$ de codimensión 1.

Escribamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus kx$.
Consideramos

$$S = \left\{ v \in V : hv = 0, \forall h \in \mathfrak{h} \right\}$$

por H.I. $S \neq 0$.
Si $v \in S$

$$hxv = hxv - 0 = hxv - xhv = [h, x]v = 0$$

(pues $[h, x] \in \mathfrak{h}$) $\Rightarrow xS \subseteq S$.

Como x es nilpotente en $S \Rightarrow \mathrm{Ker}(x|_S) \neq 0$.

Si $0 \neq v_0 \in \mathrm{Ker}(x|_S)$, entonces $v_0 \in V$ sirve.

(3)

Corolario

$\mathfrak{g}$ *una subálgebra de Lie de* $\mathrm{End}(V)$, *con* $\dim V < \infty$, *y* $\mathfrak{g}$ *consistente de endomorfismos nilpotentes,*
entonces existe una base de V *tal que las matrices de los elementos de* $\mathfrak{g}$ *son triangulares superiores estrictas.*
En particular, $\mathfrak{g}$ *resulta nilpotente como álgebra de Lie.*

dem:

Corolario

$\dim \mathfrak{g} < \infty$.
Si todo elemento $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *es nilpotente, entonces* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente.*

dem: Tomamos $V = \mathfrak{g}^{ad}$,

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x = [x, -]$$

La hipótesis + [teo Engel] $\Rightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ es nilpotente como álgebra de Lie.

Pero

$$\mathrm{Im}(\mathrm{ad}) \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

$\Rightarrow \mathfrak{g}$ es nilpotente.

Teorema (Criterios de Cartan)

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

a) *Criterio de solubilidad:*
$\mathfrak{g}$ *es soluble* $\Leftrightarrow \kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$.

b) *Criterio de semisimplicidad:*
$\mathfrak{g}$ *es semisimple* $\Leftrightarrow \kappa$ *es no degenerada.*

Corolario

$\mathfrak{g}$ *es "semisimple-bis" (*$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0$*)* $\Rightarrow \mathfrak{g}$ *es producto de simples.*

dem del coro: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideal $\Rightarrow \mathfrak{h}^{\perp_\kappa}$ es ideal;
por el criterio $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ es ideal soluble,
$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0 \Rightarrow \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0 \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.