Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 7:
Álgebras solubles y nilpotentes

Solubilidad

La *sucesión de conmutadores de* $\mathfrak{g}$ o serie *derivada* de $\mathfrak{g}$ se define por

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}$$

y para cada $j \geq 1$

$$\mathfrak{g}^{(j+1)} :== (\mathfrak{g}^{(j)})'[\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$$

Se obtiene la sucesión descendente

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}'' \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(j-1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \dots$$

Obs: $\forall j$, $\mathfrak{g}^{(j)} \leq \mathfrak{g}$ es ideal.

$\boxed{\text{Se dice que } \mathfrak{g} \text{ es } \textbf{soluble} \text{ si } \mathfrak{g}^{(j)} = 0 \text{ para algún } j.}$

Nilpotencia

La *sucesión* *central* *descendente de* $\mathfrak{g}$ se define por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}_{j+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

Se tiene la sucesión descendente (de ideales de $\mathfrak{g}$):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{j-1} \supseteq \mathfrak{g}_j \supseteq \cdots$$

$\boxed{\mathfrak{g} \text{ es } \textbf{nilpotente} \text{ si } \mathfrak{g}_j = 0 \text{ para algún } j}$

Obs: $\mathfrak{g}$ nilpotente $\Rightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Obs: Nilpotente $\Rightarrow$ soluble.

Ejemplo $\mathfrak{h}_3$

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

está generada por elementos z, x, y donde

$$z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[z, x] = [z, y] = 0$; $[x, y] = z$;

Es nilpotente, no abeliana, pues

$$\mathfrak{h}_3' = [\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3] = \mathbb{R} \cdot z = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_3)$$

Ejemplo: $\mathfrak{aff}_2 = kx \oplus ky$, $[x, y] = y$

No es nilpotente pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{aff}_2) = 0$, pero es soluble porque

$$\mathfrak{aff}_2' = ky$$

tiene dim 1, luego abeliana $\Rightarrow \mathfrak{aff}_2'' = 0$.

Matrices triangulares

superiores estrictas:

$$\mathfrak{t}_n^{>} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n,k)$$

es nilpotente. Como espacio vectorial es graduado:

$$\mathfrak{t}_n^{>} = \oplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}_i \text{ y vale } [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$$

$$\mathfrak{t}_n^{\geq} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n,k)$$

es soluble, pues $(\mathfrak{t}_n^{\leq})' \subseteq \mathfrak{t}_n^{>}$

Proposición

Toda subálgebra y todo cociente de un álgebra de Lie soluble (respectivamente, nilpotente) es soluble (respectivamente, nilpotente).

Dem:

Proposición

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ y $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ son solubles, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.

dem:

Ejercicio:

Proposición

Si $\mathfrak{n}/\mathfrak{j}$ *es nilpotente, con* $\mathfrak{j}$ *ideal* **central**
(i.e. $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$*)*
$\Rightarrow \mathfrak{n}$ *nilpotente.*

El radical

Proposición

Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *admite un único ideal soluble maximal. Este ideal se llama el radical soluble de* $\mathfrak{g}$ *y se denota por* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Demostración.

Basta ver que si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales solubles de $\mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es (ideal) soluble. En ese caso, se define

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{I} \text{ soluble}} \mathfrak{I}.$$

Consideramos

$$\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

$\mathfrak{a}$ es soluble, y como

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$$

es cociente de soluble $\Rightarrow \dfrac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ es soluble.

$\therefore\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es soluble. $\square$

$\dim \mathfrak{g} < \infty$

(recuerdo) **Definición:** $\mathfrak{g}$ es simple si $\mathfrak{g}$ es no abeliana y $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios.

Definición bis: $\mathfrak{g}$ se dice semisimple si $\mathfrak{g} \neq 0$ y $\mathfrak{g}$ no admite ideales solubles no nulos, es decir, si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Propiedades

1. $\mathfrak{g}$ es simple $\Rightarrow \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (pero no vale la vuelta).
2. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g}$ es semisimple.
3. $\mathfrak{g}$ es semisimple $\Rightarrow$ no tiene ideales abelianos, en particular $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$

Prop: $\dim \mathfrak{g} < \infty$, o bien $\mathfrak{g}$ es soluble
($\mathfrak{g} = \mathrm{rad}\mathfrak{g}$),
o bien $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ es semisimple
($\mathrm{rad}\big(\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\mathfrak{g}\big) = 0$).

Ejemplos:

- Toda álgebra de Lie de dimensión 1 ó 2 es soluble.
- $\dim \mathfrak{g} = 3 \Rightarrow \mathfrak{g}$ es o bien simple o bien soluble.
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus k\mathrm{Id}$.
  No es soluble ni simple.
  $\mathrm{rad}(\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) = k\mathrm{Id}$.

Ejemplo

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & u \\ c & -a & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, u, v \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$$

no es (semi)simple:

Ejercicio:

- $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
- $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (sin ser ss)
- $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$

Ejemplo

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{su}(2)$ son álgebras de Lie reales simples de dimensión 3 (no isomorfas entre sí).

Ejercicio

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ es simple para todo cuerpo de característica distinta de 2. Si $\mathrm{ch}(\mathbb{K}) = 2$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ es nilpotente.

Teorema

Descomposición de Levi. dim $\mathfrak{g} < \infty$, *la proyección*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathfrak{g}/\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \arrow[l, dashed, bend right, "i"'] \end{tikzcd}$$

se parte con un morfismo de álgebras de Lie.
En particular existe $\mathfrak{s}_0 \subseteq \mathfrak{g}$ subálgebra semisimple con $\mathfrak{s}_0 \cong \mathfrak{s}$ (factor de Levi), y

$$\mathfrak{g} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{s}_0$$

(sin dem por el momento)