

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 5:

Representaciones, la forma de Killing

Representaciones de grupos de Lie

Una representación de G en un espacio vectorial V es un morfismo suave

$$G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

derivando, obtenemos un morfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} = T_1 G \xrightarrow{D\rho|_1} T_{\mathrm{Id}} \mathrm{GL}(V) = \mathfrak{gl}(V) = (\mathrm{End}(V), [\cdot, \cdot])$$

Deuda:

$\rho : G \rightarrow H$ morfismo de grupos de Lie $\Rightarrow$ su diferencial
 $D\rho|_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es morfismo de álgebras de Lie.

Definición: Una representación de $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial V junto con una acción

$$\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$$

que verifica

$$x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [x, y] \cdot v$$

o equivalentemente, el dato de un morfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = (\text{End}(V), [,])$$

$$x \mapsto x \cdot -$$

Ejemplos

El espacio vectorial $V = \mathbb{K}$, con $\rho = 0$:

$$x \cdot \lambda = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \lambda \in \mathbb{K}$$

se denomina la representación trivial:

Notar que si V es una representación, $v \in V$ y $\forall X \in \mathfrak{g}$ se verifica $X(v) = 0$

$$\Rightarrow e^X v = v \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

Definición: Si V es representación,

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : x \cdot v = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Representación de definición

Si $\mathfrak{g} \subseteq \text{End}(V)$ es un subespacio cerrado por conmutador, entonces V es naturalmente una representación de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos:

- ▶ $\mathbb{R}^2$ para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
- ▶ $\mathbb{R}^3$ para $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$
- ▶ $\mathbb{C}^2$ para $\mathfrak{su}(2)$

La adjunta

Sea $V = \mathfrak{g}$ como espacio vectorial y

$$x \cdot v := \operatorname{ad}_x(v) = [x, v]$$

Jacobi dice

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

$$\Leftrightarrow [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y - \operatorname{ad}_y \operatorname{ad}_x = \operatorname{ad}_{[x, y]}$$

Se llama la representación adjunta, se denota $\mathfrak{g}^{ad}$.

Ejercicio: $(\mathfrak{g}^{ad})^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

Atención: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^{ad}$ es una rep. (real) de dim 3.

- ▶ Si V y W son dos representaciones, $V \oplus W$ es una representación con

$$x \cdot (v, w) = (x \cdot v, x \cdot w)$$

- ▶ Si $W \subseteq V$ es un subespacio y

$$\mathfrak{g} \cdot W \subseteq W$$

$\Rightarrow W$ es una (sub) representación. En ese caso, V/W también es representación via

$$x \cdot \bar{v} := \overline{x \cdot v}$$

Ejercicio: $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{ad}$ es subrepresentación $\Leftrightarrow \mathfrak{h}$ es ideal.

- ▶ Si $f : V \rightarrow W$ es un t.l. tal que

$$x \cdot f(v) = f(x \cdot v), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$$

(morfismo de representaciones) entonces $\text{Ker}(f) \subseteq V$
e $\text{Im}(f) \subseteq W$ son subrepresentaciones, y

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$$

Notación: $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ =los morfismos de representaciones.

- ▶ Si V y W son dos representaciones
 $\Rightarrow \text{Hom}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ es una
representación vía

$$(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$$

Notar

$$\text{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$$

- ▶ En particular, V^* es representación vía

$$(x \cdot \phi)(v) = -\phi(x \cdot v)$$

- ▶ $V \otimes W = V \otimes_k W$ es una representación vía

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w$$

Ejercicio (asumimos dimensión finita):

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ -módulos.

- ▶ V representación, entonces

$V^{\otimes n}$, $S^n(V)$, $\Lambda^n V$ son representaciones.

La forma de Killing

V una representación, entonces

$$\text{Bil}(V, k) = \{b : V \times V \rightarrow k : b \text{ es bilineal}\} \cong (V \otimes V)^*$$

es una representación vía

$$(x \cdot b)(v, w) = -b(x \cdot v, w) - b(v, x \cdot w)$$

Decimos que b es $\mathfrak{g}$ -invariante si

$$b(x \cdot v, w) + b(v, x \cdot w) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V$$

Construcción: V representación de dim finita, se define

$$b_V : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$$

vía

$$b_V(x, y) = \text{tr}(x|_V \circ y|_V)$$

Propiedad: $b_V(x, y) = b_V(y, x)$ y

$$b_V([y, x], z) = b(y, [x, z])$$

Es decir, $b_V : \mathfrak{g}^{\text{ad}} \times \mathfrak{g}^{\text{ad}} \rightarrow k$ es simétrica y $\mathfrak{g}$ -invariante.

dem:

$$\begin{aligned} b_V([y, x], z) &= \text{tr}([y, x]|_V z|_V) = \text{tr}((y|_V x|_V - x|_V y|_V)z|_V) \\ &= \text{tr}(yxz) - \text{tr}(xyz) \end{aligned}$$

por otro lado

$$b(y, [x, z]) = \text{tr}(y(xz - zx)) = \text{tr}(yxz) - \text{tr}(yzx)$$

Definición $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita, se define κ la forma de Killing como la forma bilineal asociada a $V = \mathfrak{g}^{ad}$:

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$$

Ejemplo $\mathfrak{aff}_2$

El álgebra no abeliana de dimensión 2, con base $\{x, y\}$ y corchete

$$[x, y] = y$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{ad}_x(x) = 0, \quad \mathrm{ad}_x(y) = y$$

$$\mathrm{ad}_y(x) = -y, \quad \mathrm{ad}_y(y) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 1, \quad \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x = 0 = \mathrm{ad}_y^2$$

$$\Rightarrow \kappa(x, x) = 1,$$

$$\kappa(x, y) = \kappa(y, x) = \kappa(y, y) = 0$$

La matriz de κ en la base $\{x, y\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Más propiedades de la forma de Killing

κ es simétrica e invariante, y además

1. Es invariante por iso de álgebras de Lie:

$$\text{si } \phi : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}$$

$$\Rightarrow \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{h}}(\phi(x), \phi(y))$$

2. Extiende escalares: Si $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ es una extensión de cuerpos, $\mathfrak{u}$ álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, $\mathfrak{g} := \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{u}$ con

$$[\lambda \otimes x, \mu \otimes y] = \lambda \mu \otimes [x, y] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{E}, \quad x, y \in \mathfrak{u}$$

$$\Rightarrow \kappa_{\mathfrak{g}}(\lambda \otimes x, \mu \otimes y) = \lambda \mu \otimes \kappa_{\mathfrak{u}}(x, y)$$

- 2' $\mathfrak{u}$ álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$, con

$$[zx, z'y] = zw[x, y], \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathfrak{u}$$

$$\Rightarrow \kappa_{\mathfrak{g}}(zx, z'y) = zz' \kappa_{\mathfrak{u}}(x, y)$$

Demostración.

1. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es base de $\mathfrak{g} \Rightarrow \{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$ es base de $\mathfrak{h}$.

Si $[x_i, x_j] = \sum_k a_{ij}^k x_k$, como ϕ es morfismo de álgebras,

$$\Rightarrow [\phi(x_i), \phi(x_j)] = \sum_k a_{ij}^k \phi(x_k)$$

i.e. las constantes de estructura son *idénticas* para esa elección de bases, $\Rightarrow$ la matriz de ad_x en la base B *coincide* con la matriz de $\text{ad}_{\phi(x)}$

$$\Rightarrow \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) = \text{tr}(\text{ad}_{\phi x} \text{ad}_{\phi y})$$

2. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de $\mathfrak{u}$ como $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $\Rightarrow \{1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n\}$ es una base de $\mathfrak{g} = E \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{u}$ como E -espacio vectorial. La cuenta es similar a (2), utilizando estas bases.



Ejercicio:

$$(\mathbb{R}^3, \times) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \\ &\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2)\end{aligned}$$

Pero veremos que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \not\cong \mathfrak{su}(2)$.

Ejemplo: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h$$

Las matrices en la base $\{x, h, y\}$ de $\text{ad}_x, \text{ad}_h, \text{ad}_y$ son

$$\text{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La tabla para la forma de Killing es

$$\kappa(h, h) = 8, \quad \kappa(x, x) = 0, \quad \kappa(y, y) = 0$$

$$\kappa(h, x) = 0, \quad \kappa(h, y) = 0, \quad \kappa(x, y) = 4$$

La matriz de κ en esta base es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ej.: en la base $\{x + y, x - y, h\}$, la matriz es $\begin{pmatrix} +8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & +8 \end{pmatrix}$

Ejercicio: $\mathfrak{su}(2)$

El álgebra de Lie real con base u, v, w y corchetes

$$[u, v] = w, [v, w] = u, [w, u] = v$$

Obs.: La permutación cíclica $u \mapsto v \mapsto w \mapsto u$ es un automorfismo del álgebra de Lie.

Calcular $\kappa(u, u)$ y $\kappa(u, v)$ y despejar los demás valores de κ . Mostrar que κ es definida negativa, luego

$$\mathfrak{su}(2) \not\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

Sin embargo, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.