Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 5:
La exponencial

La función exponencial en un grupo de Lie

Definición: Un *subgrupo 1-paramétrico de G* es un homomorfismo de grupos de Lie de $\mathbb{R}$ en G.

$$\mathbb{R} \to G$$

Calculando la derivada en cero $\rightsquigarrow$

$$T_0\mathbb{R} = \mathbb{R} \to \mathfrak{g} = T_1 G$$

$$1 \mapsto x \in \mathfrak{g}$$

$\therefore$ un grupo 1-paramétrico en $G \rightsquigarrow x \in \mathfrak{g}$

Definición: una curva integral a un campo vectorial que pasa por p es una curva

$$c : \mathbb{R} \to G$$

tal que $c(0) = p$ y

$$c'(t) = X_{c(t)} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

(es la sol. de un sist de e.d.o.s a condición inicial)

Sea X el campo inv a izq tal que

$$X_1 = x$$

Consideramos $c_x(t)$ una curva integral de X, se define

$$\exp(x) := c_x(1)$$

resulta $\boxed{\boxed{\exp : \mathfrak{g} \to G}}$

Si el campo X es inv a izq, $c(t_0) = g_0$,

$$X_{g_0 \cdot g} = \Big(D(g_0 \cdot -)\Big)(X_g)$$

Si $\sigma(t) := c(t_0 + t)$, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma'(t) = c'(t + t_0) = X_{c(t+t_0)} = X_{\sigma(t)} \\ \sigma(0) = c(t_0) = g_0 \end{cases}$$

Si en cambio $\mu(t) := c(t_0)c(t) = g_0 \cdot c(t)$, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mu(0) & = g_0 = \sigma(0) \\ \mu'(t) & = \Big(Dg_0 \cdot -)(c'(t)) \\ & = \Big(Dg_0 \cdot -)X_{c(t)} \\ & = X_{g_0 c(t)} = X_{\mu(t)} \end{cases}$$

$\therefore$ (unicidad de sist de e.d.o.'s a valores iniciales) $\Rightarrow$ $\mu(t) = \sigma(t)\ \forall t$, es decir,

$$c(t_0 + t) = c(t_0)c(t)\ \forall t_0, t$$

es decir, $c(t)$ es un grupo monoparamétrico.

Recíprocamente, si $c(t)$ es un grupo 1-paramétrico, entonces

$$c(t_0 + t) = c(t_0)c(t)$$

$$\Rightarrow c'(t_0 + t) = D(c(t_0) \cdot -)c'(t)$$

$$\Rightarrow c'(t_0) = D(c(t_0) \cdot -)c'(0) = D(c(t_0) \cdot -)x = X_{c(t_0)}$$

$\Rightarrow c(t)$ es una curva integral del unico campo inv a izq. X que en 1 vale $x = c'(0)$.

Propiedades

Sea $x \in \mathfrak{g}$, X el campo invariante a izquierda correpondiente.

1. dar un grupo 1-paramétrico $c : \mathbb{R} \to G$ con $c'(0) = x$ equivale a dar una curva integral de X con $c(0) = 1$. En cualquier caso, $\exp(x) := c(1)$.
2. $c(t_0) = \exp(t_0 x)$
3. $\exp(0) = c(0) = 1$.
4. $\exp(t_1 x) \cdot \exp(t_2 x) = c(\exp((t_1 + t_2)x)$.
5. $\exp(-tx) = (\exp(tx))^{-1}$.

Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos de Lie, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] & G \\ \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\phi"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

dem: $h \in \mathfrak{h}$, si $c : \mathbb{R} \to H$ es grupo 1-param. con $c'(0) = h$, entonces

$$\phi \circ c : \mathbb{R} \to G$$

es un grupo 1-param. y

$$(\phi \circ c)'(0) = (d\phi)c'(0) = (d\phi(h)) =: x$$

luego $\phi(\exp(h)) = \phi(c(1)) = (\phi \circ c)(1) = \exp(x)$

Coro: si conocemos la exponencial $\mathfrak{g} \to G$ y $H \subseteq G$ es un subgrupo de Lie, entonces la exponencial $\mathfrak{h} \to H$ es la restricción de la exponencial de G.

Hecho: en $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, exp es la conocida exponencial de matrices. dem:

Sobre la exponencial de matrices

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N$$

$$e^A := \lim_{N\to\infty} S_N$$

Proposición

Para cada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la sucesión de matrices $\{S_N\}_N$ definida antes es una sucesión convergente en norma, para la norma de matrices como operadores y, por lo tanto, es convergente en cualquier norma.

Demostración.

$\{S_N\}_N$ es una sucesión de Cauchy. Si $M > N$,

$$||S_M - S_N|| = \left|\left|\sum_{n=N+1}^{N} \frac{1}{n!}A^n\right|\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N} \frac{1}{n!}||A^n|| \leq \sum_{n=N+1}^{N} \frac{1}{n!}||A||^n$$

usamos la desigualdad triangular y $||AB|| \leq ||A||.||B||$. Como la exponencial de números reales es convergente y $||A||$ es un número real, la sucesión de sumas parciales de la exponencial usual $e^{||A||}$ es convergente, y en particular, es de Cauchy. $\square$

Propiedades

1. Si A y B son matrices que conmutan $\Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$
2. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
3. $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \Rightarrow e^{CAC^{-1}} = Ce^A C^{-1}$.
4. $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow$

$$e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

   Si $J(\lambda, k) = \lambda \mathrm{Id} + N$ es un bloque de Jordan de tamaño k y autovalor $\lambda \Rightarrow$

$$e^{J(\lambda,k)} = e^{\lambda} \left(\mathrm{Id} + N + \frac{1}{2} N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} \right).$$

5. $t \in \mathbb{R}$, $c(t) := e^{tA} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es diferenciable, $\sigma(0) = \mathrm{Id}$, $\sigma'(0) = A$ y $c(t_1 + t_2) = c(t_1)c(t_2)$.

$$\boxed{\boxed{\therefore\ e^A = \exp(A)}}$$

dem.

1. $AB = BA \Rightarrow$ vale la fórmula de Newton

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$e^A \cdot e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \right)$$

usando el producto de Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b^{n-k} \right) \rightsquigarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \right)$$

como queríamos.

3. $C \in \mathrm{GL}$, $S_N(A) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n$. La función

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad}_C : \mathbb{C}^{n\times n} & \to & \mathbb{C}^{n\times n} \\ A & \mapsto & CAC^{-1} \end{array}$$

es lineal en $A \Rightarrow$ es continua y verifica

$$\mathrm{Ad}_C(A \cdot B) = (\mathrm{Ad}_C A) \cdot (\mathrm{Ad}_C B)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ad}_C(A^n) = (\mathrm{Ad}_C A)^n$$

$$\Rightarrow C \exp(A) C^{-1} = \mathrm{Ad}_C(\lim_{N\to\infty} S_N(A)) = \lim_{N\to\infty} (\mathrm{Ad}_C S_N(A))$$

$$= \lim_{N\to\infty} S_N(\mathrm{Ad}_C A) = e^{\mathrm{Ad}_C(A)}$$

5. Sea $\sigma(t) := e^{tA}$;
si A fuera un bloque de Jordan de tamaño k,
$A = J(\lambda, k) \Rightarrow$

$$e^{tA} = e^{t\lambda \mathrm{Id} + tN} = e^{t\lambda}(\mathrm{Id} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1})$$

es mezcla de exp. (complejas) y polinomios en t.

En general, es claro que

e^{tA} es diferenciable $\Leftrightarrow Ce^{tA}C^{-1} = e^{tCAC^{-1}}$ lo es.

Para calcular $(e^{tA})'$ usamos

$$\left(s_N(t)\right)' = \Big(\sum_{n=0}^{N}\frac{t^n}{n!}A^n\Big)' = \sum_{n=0}^{N}\frac{nt^{n-1}}{n!}A^n$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{t^n}{n!}A^{n+1}$$

$$= \Big(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{t^n}{n!}A^n\Big)A = s_{N-1}(t)A$$

Como a la derecha tiene límite (conv. absoluta sobre compactos), entonces esto prueba (nuevamente) que e^{tA} es diferenciable, y además

$$(e^{tA})' = e^{tA}A$$

en particular $(e^{tA})'(0) = A$.

Corolario

La exponencial abstracta de cualquier grupo de Lie de matrices coincide con la exponencial usual de matrices.

Corolario

Sea G un subgrupo de Lie cerrado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, entonces

$$\mathfrak{g}=\left\{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : e^{tA}\in G \text{ para todo } t\in\mathbb{R}\right\}$$

Aplicaciones:

- Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (o en particular en $\mathbb{R}^{n\times n}$),
$$\Rightarrow \det(e^A) = \prod_{autov} e^{\lambda} = e^{\sum_{autov}\lambda} = e^{\mathrm{tr}A}$$
Luego
$$\det e^{tA} = 1 \forall t \Leftrightarrow \mathrm{tr}A = 0$$
-
$$(e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^{\mathbf{t}}\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{tA^{\mathbf{t}}+tA} = \mathrm{Id}\ \forall t$$
$$\Leftrightarrow A + A^{\mathbf{t}} = 0$$
- $(e^{tA})^{-1} = (e^{tA})^{*}\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A + A^{*} = 0.$

Ejemplos de exponenciales y espacios tangentes

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y $A \in \mathfrak{g}$, entonces $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)} > 0$, por lo tanto

$$\exp(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \subseteq \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(g) > 0\} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_0,$$

donde $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_0$ es la componente conexa de la identidad. En cambio, $\exp(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Determinemos el grupo de Lie conexo tal que su álgebra de Lie sea $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Dado que

$$\exp \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se obtiene que $\mathfrak{g} = T_{\mathrm{Id}} G$ con

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda > 0 \right\}$$

Teorema

Si G es un grupo de Lie abstracto, la exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es un difeo local alrededor de* 0.

Coro: G_0 esta generado por la imagen de la exponencial.

Atención: $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G_0$ contiene un entorno de $1 \in G$ pero la contención puede ser estricta.

Ejemplo: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$

Si $M \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, i.e. $\mathrm{tr} M = 0$. Hay tres posibilidades

1. autovalor 0 con multiplicidad 2
2. autovalores $\pm x$ con $x \in \mathbb{R}$
3. autovalores $\pm ix$ con $x \in \mathbb{R}$

Caso 1, $\mathrm{tr}\exp M = 1 + 1 = 2$.

Caso 2, $\mathrm{tr}(\exp M) = e^x + e^{-x} \geq 2$

Caso 3, $\mathrm{tr}(\exp M) = 2\cos(x) \geq -2$

$\therefore \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ no es exponencial de ninguna matriz de traza cero, i.e.

$$\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

no es sobreyectiva. Sin embargo, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ está generado, como grupo, por $\exp(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$.