Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 4:
Espacios tangentes y álgebras de Lie

$\mathfrak{g} = T_1 G$

Sea $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $c : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tal que $c(0) = \mathrm{Id}$.

$$c(t) = \mathrm{Id} + tX + O(t^2)$$

y $X \in \mathfrak{g}$.

Si $G = \{F = 0\}$,

$$0 = F(c(t)) = F(\mathrm{Id} + tX + O(t^2)) = F(\mathrm{Id}) + t(\cdots) + O(t^2)$$

$\therefore$ miramos la ecuación módulo t^2, y podemos mirar la ecuacion para $c(t)$ (módulo t^2) o para $\mathrm{Id} + tX$.

El corchete, además, será el conmutador de matrices.

Ejemplos

$$O(n,\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathbb{R}^{n^2} : MM^t = \mathrm{Id}\right\}$$

Si $M = \mathrm{Id} + tX$,módulo t^2 tenemos

$$\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} + tX)(\mathrm{Id} + tX)^t = \mathrm{Id} + t(X + X^t) + O(t^2)$$

$$\therefore \mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}}O(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} : X + X^t = 0\}$$

análogamente,

$$U(n) = \left\{M \in \mathbb{C}^{n^2} : MM^* = \mathrm{Id}\right\}$$

Si $M = \mathrm{Id} + tX \Rightarrow$ módulo t^2

$$\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} + tX)(\mathrm{Id} + tX)^* = \mathrm{Id} + t(X + X^*) + O(t^2)$$

$$\therefore \mathfrak{u}(n) = T_{\mathrm{Id}}U(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n^2} : X + X^* = 0\}$$

Ejemplos

SL(n,k)

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n^2} : \det M = 1\}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\mathrm{Id} + tX) \quad mod(t^2) \\ &= \det(t(1/t)\mathrm{Id} + tX) \quad mod(t^2) \\ &= t^n \det(X + (1/t)\mathrm{Id}) \quad mod(t^2) \\ &= t^n\Big((1/t)^n + \mathrm{tr}(X)(1/t)^{n-1} + \cdots\Big) \\ &= 1 + \mathrm{tr}(X)t + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = T_1\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{M : \mathrm{tr} M = 0\}$$

Ejemplos

$$G = Aff_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) : c = 0,\ d = 1 \right\}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, $\mathrm{Id} + tX = \begin{pmatrix} 1 + tx & ty \\ tu & 1 + tv \end{pmatrix}$
las ecs (mod t^2) son

$$tu = 0, \quad 1 + tv = 1$$

$$\therefore \mathfrak{aff}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

tiene corchete no nulo:

$$\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Ejemplos

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$$

$\mathfrak{su}(2) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 + t(x+iy) & t(a+bi) \\ -t(a-bi) & 1 + t(x-iy) \end{pmatrix} : 1 + 2tx + O(t^2) = 1$$

$$\therefore \mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} iy & a+bi \\ -a+bi & -iy \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base es $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$

Ejercicio: $\mathfrak{su}(2) \cong (\mathbb{R}^3, \times) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$

$\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, antisim no deg.

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{g : \omega(gv, gw) = \omega(v, w)\}$$

Si $g = \mathrm{Id} + tX$,

$$\omega((\mathrm{Id} + tX)v, (\mathrm{Id} + tX)w) = \omega(v, w) \; Mod(t^2)$$

$$\Leftrightarrow \; \omega(Xv, w) + \omega(v, Xw) = 0$$

Si $[\omega]$ es la matriz de la forma blineal,

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) = \{X : X^t[\omega] + [\omega]X = 0\}$$

Obs: $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, pero para $2n > 2$ ya no

Construcciones

Ideales - cocientes:

un subespacio $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$ se dice ideal si

$$[\mathfrak{j}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{j}$$

En ese caso, $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ es algebra de Lie con el corchete heredado por $\mathfrak{g}$

Obs: $\mathfrak{j}$ y $\mathfrak{k}$ ideales, entonces $\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{k}$ y $[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$ también:

$$[x, [j, k]] = [[x, j], k] + [j, [x, k]]$$

En particular $g' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es ideal. También $g^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ y $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, etc.

Construcciones

$\mathfrak{g} \xrightarrow{f} \mathfrak{h}$ morfismo de álgebras de Lie entonces

$$\mathfrak{k} := \mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathfrak{g} : f(x) = 0\}$$

es un ideal, e $Im(f) \subseteq \mathfrak{h}$ es subálgebra de Lie. Además

$$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(f) \cong Im(f)$$

Construcciones

El centro

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} : [z, x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

es un ideal.

Ejemplo: $\mathfrak{gl}(n, k) = k^{n \times n}$= todas la smatrices $n \times n$ el centro es de dimensión 1:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(n, k)) = k\mathrm{Id}_n$$

Obs: $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(g)$ puede, a su vez, tener centro.

Ejemplo: $\mathfrak{h}_3$=el álgebra de Heisenberg de dim 3

$$\mathfrak{h}_3(k) = kx \oplus ky \oplus kz$$

$$[x, y] = z$$

tiene centro kz, y $\mathfrak{h}_3/\mathfrak{z} = k\overline{x} \oplus k\overline{y}$ es abeliana (de dim 2).

Derivaciones

Derivaciones y derivaciones interiores:
$(A, *)$ una "k-álgebra".

$$G = \mathrm{Aut}_k(A) = \{g \in \mathrm{GL}(A) : g(a*b) = g(a)*g(b),\ \forall a, b \in A\}$$

Afirmación:

$$T_{\mathrm{Id}} G = \mathrm{Der}_k(A)$$

pues

$$(\mathrm{Id} + tX)(a) * (\mathrm{Id} + tX)(b) = (\mathrm{Id} + tX)(a * b) \ \ Mod(t^2)$$

$$\Leftrightarrow a*b + t(X(a)*b + a*X(b)) + O(t^2) = a*b + tX(a*b) \ \ Mod(t^2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(a) * b + a * X(b) = X(a * b)}$$

En particular, $Der_k(A)$ es un álgebra de Lie con el conmutador.

Derivaciones

Pongamos $(A, *) = (\mathfrak{g}, [-,-])$, asociado a $\mathfrak{g}$ tenemos el álgebra de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Ejemplo: $x_0 \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_{x_0} := [x_0, -] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

es una derivación, llamada interior.

Hecho: $\mathrm{InDer}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ es un ideal:

$$\begin{aligned}
[D, \mathrm{ad}_x](y) &= (D \circ \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \circ D)(y) \\
&= D([x, y]) - [x, D(y)] \\
&= [D(x), y] = \mathrm{ad}_{D(x)}(y)
\end{aligned}$$

Derivaciones

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x = [x, -]$$

Ejercicio: (Jacobi) ad es morfismo de álgebras de Lie:

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x$$

la imagen es $\mathrm{InDer}(\mathfrak{g})$, el núcleo es $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\therefore \boxed{\mathrm{InDer}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$$

Derivaciones

Ejemplo: $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}_2 = kh \oplus kx$ con $[h, x] = x$. $\mathrm{Der} = ?$

Observación general (Ejercicio!)
$D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \Rightarrow D[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (y $D(\mathfrak{z}) \subseteq \mathfrak{z}$)

$\Rightarrow$ en $\mathfrak{aff}_2$, $D(x) = \lambda x$,
$D(h) = ah + bx$, $[h, x] = x \Rightarrow$

$$[ah + bx, x] + [h, \lambda x] = \lambda x$$

$$ax + 0 + \lambda x = \lambda x$$

$\therefore a = 0$. Es decir, $\boxed{D(h) = bx,\ D(x) = \lambda x}$

$$\Rightarrow D = [-bx + \lambda h, -]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{aff}_2) = \mathrm{InDer}(\mathfrak{aff}_2) \cong \mathfrak{aff}_2/\mathfrak{z} = \mathfrak{aff}_2$$

Derivaciones

Ejemplos / ejercicios:

- $A = \mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-álgebra. Sabemos que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{\mathrm{Id}, \overline{(-)}\}$. Si calculamos $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$:

  $$D(1) = D(1^2) = 1D(1) + D(1)1 \Rightarrow D(1) = 0$$

  $$0 = D(-1) = D(i^2) = iD(i) + D(i)i = 2iD(i) \Rightarrow D(i) = 0$$

  $\therefore \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 0$ (luego $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ es discreto), como era de esperar.

- Ejercicio interesante:
  Calcular $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ ($\cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$)

- Ejercicio excepcional!
  Calcular $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ ($\cong \mathfrak{g}_2 \subseteq \mathfrak{so}(7, \mathbb{R})$)

Producto semidirecto

Ejercicio

$\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son ágebras de Lie y

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$$

un morfismo de álgebras de Lie, escribimos

$$x \cdot h := \rho(x)(h) \qquad x \in \mathfrak{g}, h \in \mathfrak{h}$$

Definimos $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ como esp. vect. y

$$[x + h, y + h'] = [x, y]_{\mathfrak{g}} + x \cdot h' - y \cdot h + [h, h']_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$$

y resulta un álgebra de Lie, con $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g}$ un ideal y

$$\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g} / \mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$$

Ejercicio de geom. diferencial: Si G y H son grupos de Lie, $G \times H \to H$ una acción suave, entonces

$$T_1(H \rtimes G) = \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g}$$

Clasificacion en dimensiones bajas

- dim 1
- dim 2
  - abeliana
  - no abeliana: $\mathfrak{aff}_2$, $[x, y] = y$

    Notar $\mathfrak{aff}_2 = ky \rtimes kx$

Clasificacion en dimensiones bajas

dim 3: $\mathfrak{g}$ tiene centro?

- $\boxed{\text{abeliana}}$
- centro de dim 1, base $\{x, y, z\}$ con z central:

$$[z, x] = 0 = [z, y]$$

  Consideramos $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

  - $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ no abeliana. Cambiando de base, $[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{y}$,

$$[x, y] = y + az$$

    Si $y' = y + az \Rightarrow [x, y'] = y' \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \boxed{\mathfrak{aff}_2 \times kz}$
  - $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ es abeliana, o bien $[x, y] = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}$ abeliana, o bien $[x, y] \neq 0 \Rightarrow$

$$[x, y] = az \quad (a \neq 0)$$

  Cambiando z por $\widetilde{z} = az \rightsquigarrow \boxed{\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_3}$ $[x, y] = z$
- Si $\mathfrak{g}$ no tiene centro, tendrá ideales?

Clasificacion en dimensiones bajas

- $\mathfrak{g}$ tiene un ideal propio $\Rightarrow$ tiene un ideal de dimensión 2, $\mathfrak{j}$, con base x, y, puede ser $[x, y] = 0$, o $[x, y] = y$.

  $\therefore$ $\mathfrak{g}$ tiene base $\{x, y, h\}$, con $[h, \mathfrak{j}] \subseteq \mathfrak{j}$.

  $$\Rightarrow D := \mathrm{ad}_h|_{\mathfrak{j}} : \mathfrak{j} \to \mathfrak{j}$$

  y Jacobi dice que $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{j})$.
  - $\mathfrak{j}$ abeliana $\rightsquigarrow$ D una t.l. arbitraria.
  - $\mathfrak{j} = \mathfrak{aff}_2 \rightsquigarrow D = \mathrm{ad}_{x_0}$
- Si $\mathfrak{g}$ no tiene ideales (propios)?
  no anda la construcción inductiva..
  Hecho: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 3$, $\mathfrak{g}$ sin ideales
  $\Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, o $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Definición: Un álgebra de Lie se dice simple si no es abeliana y no tiene ideales propios.