Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 3:
a) Grupos finitos y grupos compactos
b) Campos vectoriales y álgebras de Lie

Reps. de grupos de Lie compactos

G grupo **finito** y V una representación en un espacio vectorial sobre k con $1/|G| \in k$.

[Maschke] Si $S \subseteq V$ es G-estable, entonces existe $S' \subseteq V'$ tal que $V = S \oplus S'$ y S es G-estable.

dem: Sea $p : V \to V$ tal que $p^2 = p$ e $\mathrm{Im}(p) = S$. Si $p(g \cdot v) = g \cdot p(v)$, entonces

$$S' = \mathrm{Ker}(p)$$

funciona.
Si p no es G-lineal, cambiamos p por $\widetilde{p}$ y funciona:

$$\widetilde{p} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot p(g^{-1} \cdot -)$$

Reps. de grupos de Lie compactos

G grupo **de Lie compacto** y V una representación continua en un espacio vectorial sobre $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, de dimensión finita.

[Maschke-type] Si $S \subseteq V$ es G-estable, entonces existe $S' \subseteq V'$ tal que $V = S \oplus S'$ y S es G-estable.

dem 1: Sea $p : V \to V$ tal que $p^2 = p$ e $\mathrm{Im}(p) = S$. Si $g \cdot p(v) = p(g \cdot v)$, entonces

$$S' = \mathrm{Ker}(p)$$

funciona.
Si p no es G-lineal, cambiamos p por

$$\widetilde{p}(v) := \frac{1}{Vol(G)} \int_G g \cdot p(g^{-1} \cdot v) dg$$

Reps. de grupos de Lie compactos

dem 2: Sea $\langle -, - \rangle$ un p.i. en V. Si G se mapea en $O(V)$ (o $U(V)$ en el caso complejo), es decir,

$$\langle g \cdot v, g \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

entonces $S^{\perp}$ es G-estable también.
Si G no se mapea en $U(V)$, entonces se define un NUEVO p.i.

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle := \frac{1}{Vol(G)} \int_G \langle g \cdot v, g \cdot w \rangle dg$$

Es claro que es$G$-estable (la medida dg se toma G-invariante), es (sesqui)bilineal, y es definido positivo. Entonces $S^{\perp'}$= el perpendicular c.r.a. este nuevo p.i. es un complemento G estable de S.

Reps. de grupos de Lie compactos

Observación:

Si G es un subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$
(resp $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$)

entonces es conjugado a un subgrupo de $O(n, \mathbb{R})$
(resp $U(n)$)

Reps. de grupos de Lie compactos

Ejemplo: $G = S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$. $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que todos los autovalores están en $i\mathbb{Z}$.

Si $g = e^{\imath\theta}$ y $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow S^1 \curvearrowright \mathbb{R}^n$ via

$$g \cdot v := \exp(\theta X) \cdot v$$

(notar la buena definición)

Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es G-estable (equivalente a ser X-estable!), tomamos $v_1, \cdots, v_k$ base de S, completamos $v_{k+1}, \cdots, v_n$ a una base de $\mathbb{R}^n$, definimos

$$\left.\begin{array}{ll} p(v_i) = v_i, & i = 1, \cdots, k \\ p(v_i) = 0, & i = k+1, \cdots, n \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\widetilde{p}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\theta X) p\Big(\exp(-\theta X)(x_1, \cdots, x_n)\Big) d\theta$$

Reps. de grupos de Lie compactos

o bien, en $\mathbb{R}^n$ tomamos el p.i. standard, y definimos, el nuevo p.i. via

$$((v, w)) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \exp(\theta X)v, \exp(\theta X)w \rangle d\theta$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Derivaciones 1
Si A es una k-álgebra, por ejemplo si M es variedad y $A = C^\infty(M)$, se define

$$\mathrm{Der}_k(A) = \{D \in \mathrm{End}_k(A) : D(ab) = D(a)b + aD(b)\ \forall a, b \in A\}$$

Derivaciones 2
Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Der}_k(U) = \bigoplus_{i=1}^{n} C^\infty(U)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Si $D \in \mathrm{Der}_k(U)$, $D = \sum_{i=1}^n p_i\partial_i : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ verifica la regla de Leibnitz, y en geometría apendemos que todos los operadores que verifican Leibnitz son de esa forma.

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Corchete de Lie
Si D y E son derivaciones, entonces $D \circ E$ no nec. lo es, pero

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D$$

sí lo es.

dem 1:

$$D(E(ab)) = D\big(E(a)b + aE(b)\big)$$

$$= D(E(a))b + E(a)D(b) \ + \ D(a)E(b) + aD(E(b))$$

$$E(D(ab)) = E\big(D(a)b + aD(b)\big)$$

$$= E(D(a))b + D(a)E(b) \ + \ E(a)D(b) + aE(D(b))$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Corchete de Lie

Si D y E son derivaciones, entonces $D \circ E$ no nec. lo es, pero

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D$$

sí lo es.

dem 2: $D = p\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $E = q\dfrac{\partial}{\partial x_j}$,

$$D(E(f)) = p\frac{\partial}{\partial x_i}(q\frac{\partial f}{\partial x_j}) = p\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

$$E(D(f)) = q\frac{\partial}{\partial x_j}(p\frac{\partial f}{\partial x_i}) = q\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + qp\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$$

$$\Rightarrow [D, E] = p\partial_i(q)\partial_j - q\partial_j(p)\partial_i$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Derivaciones

G un grupo de Lie, $D : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ una derivación, $g \in G$, se define $G \curvearrowright C^\infty(G)$ via

$$(g \cdot f)(x) := f(g^{-1}x)$$

decimos que D es G-invariante si

$$g \cdot D(f) = D(g \cdot f) \;\; \forall g \in G, \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

(o equivalentemente $g^{-1} \cdot D(f) = D(g^{-1} \cdot f)$)

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Derivaciones G-invariantes:

$\boxed{\text{Ejemplo: } G = (\mathbb{R}, +)}$

$$D(f) = p(x)f'(x)$$

$g = x_0,$

$$(g \cdot f)(x) = f(x - x_0)$$

$$D(g \cdot f) = p(x)f'(x - x_0)$$

$$g \cdot D(f) = p(x - x_0)f'(x - x_0)$$

$$gD = Dg \; \forall g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D(f) = cte \; f'$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

$\boxed{\text{Ejemplo: } G = (\mathbb{R}^\times, \cdot)}$

$$D(f) = p(x) f'(x)$$

$g = \lambda$,

$$(g \cdot f)(x) = f(\lambda^{-1} x)$$

$$D(g \cdot f) = p(x) \lambda^{-1} f'(\lambda^{-1} x)$$

$$g \cdot D(f) = p(\lambda^{-1} x) f'(\lambda^{-1} x)$$

$$\therefore p(x/\lambda) = p(x)/\lambda$$

o bien

$$p(x) = \lambda p(x/\lambda)$$

o bien ($\lambda = x$, $p(1) = c$)

$$p(x) = cx, \quad D(f) = cxf'(x)$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Observacion:

$$D(f)(g) = (g \cdot D(f))(1)$$

$\therefore D(f)$ esta determinada por $D(f)(1)$.

$$D(f)(1) = v(f), \quad v \in T_1 G$$

v= vector velocidad de una curva que pasa por 1,
$v(f) =$ derivada direccional (en la direccion tangente v)

$$v(f) = \Big(f(c(t))\Big)'(0)$$

Luego

$$\mathrm{Der}^G = \{D \in \mathrm{Der} : g \cdot D = D(g \cdot -)\ \forall g \in G\} \cong T_1(G)$$

es un esp. vect. de la misma dimensión (finita!) que G.

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Ejemplo $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$,
$B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$D(f)(p) = \sum_{ij=1}^{2} A_{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\Big|_p$$

$$= (A_{11}(p)\partial_x + A_{12}(p)\partial_y + A_{21}(p)\partial_z + A_{22}(p)\partial_t)(f(x, y, z, t))$$

$$B^{-1} \cdot D(f) = \sum_{ij} A_{ij}(B \cdot p) \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\Big|_{B \cdot p}$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

$$\widetilde{f} := B^{-1} \cdot f$$

$$\widetilde{f}(x,y,z,t) = f\left(B \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)\right) = f(ax+bz, ay+bt, cx+dz, cy+dt)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{11}}\widetilde{f} = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f} = \left(a\frac{\partial}{\partial x_{11}} + c\frac{\partial}{\partial x_{21}}\right)(f)|_{B\cdot p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k1}\frac{\partial}{\partial x_{k1}}\right)(f)|_{B\cdot p}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}}\widetilde{f} = \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{f} = \left(a\frac{\partial}{\partial x_{12}} + c\frac{\partial}{\partial x_{22}}\right)(f)|_{B\cdot p} = \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k1}\frac{\partial}{\partial x_{k2}}\right)(f)|_{B\cdot p}$$

mas en gral

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\widetilde{f}\Big|_p = \left(\sum_{k=1}^{2} b_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\right)(f)|_{B\cdot p}$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

$$B^{-1}\cdot D(f)=\sum_{ij}A_{ij}(B\cdot p)\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\Big|_{B\cdot p}$$

$$D(B^{-1}\cdot f)=\sum_{i'j}A_{i'j}(p)\frac{\partial}{\partial x_{i'j}}\widetilde{f}\Big|_{p}=\Big(\sum_{i'jk=1}A_{i'j}(p)b_{ki'}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\Big)(f)|_{B\cdot p}$$

son iguales $\Leftrightarrow$ (vemos los términos $k=i$)

$$A_{ij}(B\cdot p)=\sum_{i'}A_{i'j}(p)b_{ii'}$$

Si $p=\mathrm{Id}$, $a_{ij}=A_{ij}(\mathrm{Id})$,

$$A_{ij}(B)=\sum_{i'}a_{i'j}b_{ii'}=(b\cdot a)_{ij}$$

$$\therefore D(f)=\sum_{ijk}x_{ik}a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}=D_a(f)$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

$$D_a \circ D_b = \sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big(\sum_{i'j'k'} x_{i'k'} b_{k'j'} \frac{\partial}{\partial x_{i'j'}} \Big)$$

$(i' = i,\, k' = j)$

$$= \sum_{ijk,j'} x_{ik} a_{kj} b_{jj'} \frac{\partial}{\partial x_{ij'}} + terminos\ \partial^2$$

$$= \sum_{ij'} (xab)_{ij'} \frac{\partial}{\partial x_{ij'}} + terminos\ \partial^2$$

$$= D_{ab} + terminos\ \partial^2$$

$$\boxed{\boxed{\therefore\ D_a \circ D_b - D_b \circ D_a = D_{[a,b]}}}$$

Campos vectoriales y álgebras de Lie

Ejemplo 0: un álgebra de Lie de matrices es un subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$ que es estable por comutador.

Ejemplo ∞: El espacio tangente $T_1 G$ con G subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dado por ecuaciones

Definición: Un álgebra de Lie sobre un cuerpo k es un k-esp vect $\mathfrak{g}$ junto con una aplicación bilineal (llamada corchete)

$$[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que verifica

- Antisimetría: $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$
- Jacobi: $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

- Cómo calcular espacios tangentes?
- diccionario Grupos $\leftrightarrow$ Álgebras de Lie
- desarrollar teoría sobre álgebras de Lie
  - problema de clasificación
  - representaciones