

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 22

Caracteres

Caracteres como funciones generatrices

Caso $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Miramos autovalores de $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

V

$\bigoplus_i (V)_i$

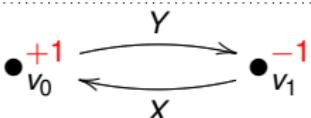
$\text{ch}_V = \sum_i \dim(V_i) q^i$

V_0

$\bullet_{v_0}^0$

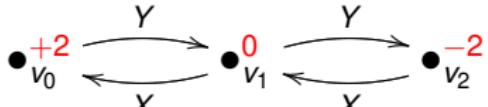
$q^0 = 1$

V_1



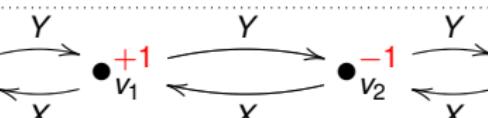
$q + q^{-1}$

V_2



$q^2 + 1 + q^{-2}$

V_3



$q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}$

Propiedades básicas

- 1 $V \cong W \Rightarrow \text{ch}(V) = \text{ch}(W)$
- 2 $\text{ch}(V \oplus W) = \text{ch}(V) + \text{ch}(W)$
- 3 $S \subseteq V$ subrep. $\Rightarrow \text{ch}(V/S) = \text{ch}(V) - \text{ch}(S)$
- 4 $\text{ch}(V \otimes W) = \text{ch}(V) \cdot \text{ch}(W)$

Consecuencias

1 $V = \bigoplus_i S_i \cong \bigoplus_i V(m_i) \Rightarrow \text{ch}(V) = \sum_i \text{ch}(V(m_i))$

$$= \sum_i (q^{-m_i} + q^{-m_i+2} + \cdots + q^{m_i-2} + q^{m_i})$$
$$= \sum_r \dim(V)_r q^r$$

2 el coef. de mayor grado = la multiplicidad de $V(m)$ en V con m máximo.

3 $r \in \mathbb{N}_0$,

$\dim(V)_r =$ el coef. de q^r en $\text{ch}(V)$
= multiplicidad de $V(m)$ en V
con $r \leq m$ y m de la misma paridad que r .

4 $\dim(V)_r - \dim(V)_{r+2} =$ mult. de $V(r)$ en V

5 $\therefore \text{ch}(V) = \text{ch}(W) \Rightarrow V \cong W$

Consecuencias

Ejercicio (ver la guía):

$$V(m) \otimes V(m') \cong \bigoplus_{i=0}^{[(m+n)/2]} V(m+m'-2k)$$

Por ejemplo, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, vemos $V = \mathbb{C}^2 = V(1)$.

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = V(1) \otimes V(1) = V(2) \oplus V(0)$$

$$[H, X] = 2X, [H, H] = 0H, [H, Y] = -2Y$$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\text{ad}} = V(2),$$

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong (\mathbb{C}^2)^* \otimes \mathbb{C}^2 = M_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\text{Id} = V(2) \oplus V(0)$$

$$V(1) \otimes V(3) = V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$$

Caracteres como trazas

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{k \text{ autovalor de } H} (\dim V_k) q^k = \mathrm{tr}(q^H|_V)$$

donde $q^H = e^{\ln(q)H}$, pues

$$v \in V_k (H \cdot v = kv)$$

$$\Rightarrow q^H \cdot v = e^{\tau H} \cdot v = e^{\tau k} v = q^k v$$

$$V = \bigoplus_k V_k \Rightarrow \mathrm{tr}(q^H) = \sum_k q^k \dim(V_k) = \mathrm{ch}(V)$$

Si G es (simplemente conexo) tal que $T_1 G = \mathfrak{g}$, podemos pensar que $q^H = e^{(\ln q)H} \in G$. Si V es un \mathfrak{g} -módulo \Rightarrow es un G -módulo. Para $g \in G$,

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(g|_V)$$

es una función invariante por conjugación.

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, podemos restringir a $\exp(\mathfrak{h})$:

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{\chi_V} \mathbb{C}$$

ch

Caso $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$,

$$\mathbb{C}H \xrightarrow{\exp} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\chi_V} \mathbb{C}$$

$$\tau H \longmapsto e^{\tau H} \longmapsto \mathrm{tr}(q^H)$$

donde $q = e^\tau$.

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $T := \exp(\mathfrak{h})$ (\mathfrak{h} abeliana, luego $T = \exp(\mathfrak{h})$ ya es un subgrupo).

$$\widetilde{W} := \{g \in G : gTg^{-1} \subseteq T\}$$

Claramente $T \subseteq \widetilde{W}$ y por construcción $T \triangleleft \widetilde{W}$

Proposición

$$\widetilde{W}/T \cong W$$

donde W = el grupo de Weyl.

dem: tema de final?

Obs: \mathfrak{h} de Cartan, $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \Rightarrow x \in \mathfrak{h}$.

$\Rightarrow T_1 \widetilde{W} = \mathfrak{h} \Rightarrow W = \widetilde{W}/T$ es discreto $\Rightarrow W$ es finito.

Ejemplo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} : 0 \neq z \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zad - \frac{bc}{z} & -ab(z - \frac{1}{z}) \\ cd(z - \frac{1}{z}) & \frac{ad}{z} - zbc \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} T$$

la condición es $ab = 0 = cd$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \widetilde{W}/T = \left\{ \overline{\mathrm{Id}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \right\} = \left\{ \overline{\mathrm{Id}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\widetilde{W}/T \curvearrowright \mathfrak{h}$ vía

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -H$$

$\therefore H \mapsto -H$, como el grupo de Weyl de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\alpha \mapsto -\alpha$.

Caso $SL(n, \mathbb{C})$

$W = \widetilde{W}/T$ = matrices de permutacion $\cong S_n$

$$P_\sigma \cdot \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot P_\sigma^{-1} = \text{diag}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$$

Notar

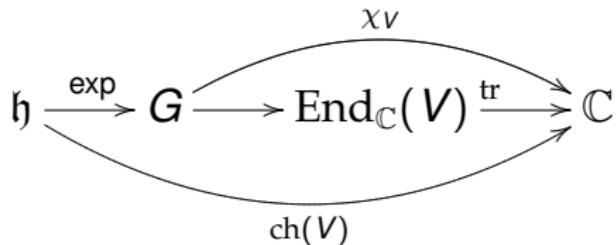
$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} \mapsto -H_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

se implementa por s_i = matriz de permutación $(i, i + 1)$

Ejercicio: ver la matriz de permutación $(i, i + 1)$ anda bien en general, i.e. coincide con

$$H_k \xrightarrow{s_i} H_k - 2 \frac{\text{tr}(H_k H_i)}{\text{tr}(H_i H_i)} H_i$$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$:



Corolario

$\text{ch}(V) : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como antes, es una función invariante por W

En $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\text{ch}(V)(\tau) = \text{tr}(e^{\tau H}|_V) = \text{tr}(q^H|_V)$ es una función invariante por $\tau \leftrightarrow -\tau$, o vista en q , invariante por $q \mapsto \frac{1}{q}$.

El carácter como objeto algebraico

$V \in \mathfrak{g}\text{-mod}$, de pesos / $\dim V_\mu < \infty \forall \mu$, $\text{ch} =$ la suma formal:

$$\text{ch } V := \sum_{\mu} \dim V_\mu e^\mu$$

Si $\dim V < \infty$, entonces $\mu \in \Lambda$ retículo $\cong \mathbb{Z}^\ell$

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}^\ell$$

$$\lambda_i(h_j) = \delta_{ij} \leftrightarrow e_i$$

$$\begin{aligned} \text{ch } V \in \mathbb{C}[\Lambda] &\cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}^\ell] \cong \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, \dots, q_\ell^{\pm 1}] \\ e^{\lambda_i} &\leftrightarrow e_i \leftrightarrow q_i \end{aligned}$$

Claramente valen $V \cong W \Rightarrow \text{ch}(V) = \text{ch}(W)$,

$$\text{ch}(V \oplus W) = \text{ch}(V) + \text{ch}W$$

$$\text{ch}(V \otimes W) = \text{ch}(V) \cdot \text{ch}W$$

(con el producto $e^\mu e^\lambda = e^{\mu+\lambda}$)

Weyl character formula

Caso $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $V = V(m)$,

$$\text{ch}(V(m)) = q^{-m} + q^{-m+2} + \cdots + q^{m-2} + q^m$$

$$= q^{-m} \sum_{k=0}^m q^{2k} = q^{-m} \frac{1 - q^{m+2}}{1 - q^2}$$

$$= q^{-(m+1)} \frac{1 - q^{m+2}}{q^{-1} - q}$$

$$= \frac{q^{(m+1)} - q^{-(m+1)}}{q - q^{-1}}$$

Weyl character formula

Caso $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\text{ch}(V) : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$, $q = e^\tau$, $\tau H \in \mathfrak{h} = \mathbb{C}H$

$$\text{ch}(V(m)) = \frac{q^{(m+1)} - q^{-(m+1)}}{q - q^{-1}}$$

$\alpha \in \{\alpha\} = \Delta \subset \mathfrak{h}^* = (\mathbb{C}H)^*$, $\alpha(H) = 2$,

$w(\alpha) = s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $s_\alpha(H) = -H$,

$V(m) = L(\lambda)$ con $\lambda(H) = m \Rightarrow \lambda = \frac{m}{2}\alpha$

$$q^m = e^{\tau m} = e^{\tau \lambda(H)} = e^{\lambda(\tau H)}, \quad q^{m+1} = e^{(\lambda + \frac{\alpha}{2})(\tau H)}$$

$$\therefore \text{ch}(V(m)) = \text{ch}(L(\lambda)) = \frac{e^{(\lambda + \frac{\alpha}{2})(\tau H)} - e^{(\lambda + \frac{\alpha}{2})(w\tau H)}}{e^{\frac{\alpha}{2}\tau H} - e^{-\frac{\alpha}{2}\tau H}}$$

Weyl character formula

λ tal que $\dim L(\lambda) < \infty$, la rep. simple de peso máximo λ ,
 $H \in \mathfrak{h}$:

$$\text{tr}(e^H) = \text{ch}(L(\lambda))(e^H) = \frac{\sum_{\omega \in W} (-1)^\omega e^{(\lambda+\rho)(\omega H)}}{\prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{\alpha(H)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(H)}{2}})}$$

donde $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$, $(-1)^\omega = (-1)^{\ell(\omega)}$,
 $\ell(\omega)$ = longitud en W ,

ch como expresión formal:

$$\text{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{\omega \in W} (-1)^\omega e^{w(\lambda+\rho)}}{\prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})} \in \mathbb{C}[\Lambda] \subset \mathbb{C}[\frac{1}{2}\Lambda]$$