GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE
1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 22

Caracteres

Caracteres como funciones generatrices

Caso $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Miramos autovalores de $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

V	$\bigoplus_i (V)_i$	$\mathrm{ch}_V = \sum_i \dim(V_i) q^i$
V_0	$\bullet^{0}_{v_0}$	$q^0 = 1$
V_1	$\bullet^{+1}_{v_0} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{-1}_{v_1}$	$q + q^{-1}$
V_2	$\bullet^{+2}_{v_0} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{0}_{v_1} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{-2}_{v_2}$	$q^2 + 1 + q^{-2}$
V_3	$\bullet^{+3}_{v_0} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{+1}_{v_1} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{-1}_{v_2} \underset{X}{\overset{Y}{\rightleftarrows}} \bullet^{-3}_{v_3}$	$q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}$

Propiedades básicas

1. $V \cong W \Rightarrow \mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(W)$
2. $\mathrm{ch}(V \oplus W) = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(W)$
3. $S \subseteq V$ subrep. $\Rightarrow \mathrm{ch}(V/S) = \mathrm{ch}(V) - \mathrm{ch}(S)$
4. $\mathrm{ch}(V \otimes W) = \mathrm{ch}(V) \cdot \mathrm{ch}(W)$

Consecuencias

1. $$V = \bigoplus_i S_i \cong \bigoplus_i V(m_i) \Rightarrow \mathrm{ch}(V) = \sum_i \mathrm{ch}(V(m_i))$$
   $$= \sum_i \left(q^{-m_i} + q^{-m_i+2} + \cdots + q^{m_i-2} + q^{m_i}\right)$$
   $$= \sum_r \dim(V)_r q^r$$
2. el coef. de mayor grado = la multiplicidad de $V(m)$ en V con m máximo.
3. $r \in \mathbb{N}_0$,
   $\dim(V)_r$ = el coef. de q^r en $\mathrm{ch}(V)$
   = multiplicidad de $V(m)$ en V
   con $r \leq m$ y m de la misma paridad que r.
4. $\dim(V)_r - \dim(V)_{r+2}$ = mult. de $V(r)$ en V
5. $\therefore \mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(W) \Rightarrow V \cong W$

Consecuencias

Ejercicio (ver la guía):

$$V(m) \otimes V(m') \cong \bigoplus_{i=0}^{[(m+n)/2]} V(m + m' - 2k)$$

Por ejemplo, $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, vemos $V = \mathbb{C}^2 = V(1)$.

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = V(1) \otimes V(1) = V(2) \oplus V(0)$$

$$[H, X] = 2X, \ [H, H] = 0H, \ [H, Y] = -2Y$$

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathrm{ad}} = V(2)$,

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong (\mathbb{C}^2)^* \otimes \mathbb{C}^2 = M_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\mathrm{Id} = V(2) \oplus V(0)$

$$V(1) \otimes V(3) = V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$$

Caracteres como trazas

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{k \text{ autovalor de } H} (\dim V_k) q^k = \mathrm{tr}\left(q^H|_V\right)$$

donde $q^H = e^{\ln(q)H}$, pues

$$v \in V_k \ (H \cdot v = kv)$$

$$\Rightarrow \quad q^H \cdot v = e^{\tau H} \cdot v = e^{\tau k} v = q^k v$$

$$V = \bigoplus_k V_k \Rightarrow \ \mathrm{tr}(q^H) = \sum_k q^k \dim(V_k) = \mathrm{ch}(V)$$

Si G es (simplemente conexo) tal que $T_1 G = \mathfrak{g}$, podemos pensar que $q^H = e^{(\ln q)H} \in G$. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo $\Rightarrow$ es un G-módulo. Para $g \in G$,

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \mathrm{tr}(g|_V)$$

es una función invariante por conjugación.

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, podemos restringir a $\exp(\mathfrak{h})$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\exp"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{ch}"'] & G \arrow[r, "\chi_V"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Caso $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$,

$$\mathbb{C}H \xrightarrow{\exp} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\chi_V} \mathbb{C}$$

$$\tau H \longmapsto e^{\tau H} \longmapsto \mathrm{tr}(q^H)$$

donde $q = e^{\tau}$.

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $T := \exp(\mathfrak{h})$ ($\mathfrak{h}$ abeliana, luego $T = \exp(\mathfrak{h})$ ya es un subgrupo).

$$\widetilde{W} := \{g \in G : gTg^{-1} \subseteq T\}$$

Claramente $T \subseteq \widetilde{W}$ y por construcción $T \triangleleft \widetilde{W}$

Proposición

$$\widetilde{W}/T \cong W$$

donde W= el grupo de Weyl.

dem: tema de final?

Obs: $\mathfrak{h}$ de Cartan, $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \Rightarrow x \in \mathfrak{h}$.
$\Rightarrow T_1\widetilde{W} = \mathfrak{h} \Rightarrow W = \widetilde{W}/T$ es discreto $\Rightarrow W$ es finito.

Ejemplo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} : 0 \neq z \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zad - \frac{bc}{z} & -ab(z-\frac{1}{z}) \\ cd(z-\frac{1}{z}) & \frac{ad}{z} - zbc \end{pmatrix} \overset{?}{\in} T$$

la condición es $ab = 0 = cd$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \widetilde{W}/T = \left\{ \overline{\mathrm{Id}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \right\} = \left\{ \overline{\mathrm{Id}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\widetilde{W}/T \curvearrowright \mathfrak{h}$ vía

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -H$$

$\therefore H \mapsto -H$, como el grupo de Weyl de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\alpha \mapsto -\alpha$.

Caso $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

$W = \widetilde{W}/T =$ matrices de permutacion $\cong S_n$

$$P_\sigma \cdot \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \cdot P_\sigma^{-1} = \mathrm{diag}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$$

Notar

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \mapsto -H_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

se implementa por $s_i =$ matriz de permutación $(i, i+1)$

Ejercicio: ver la matriz de permutación $(i, i+1)$ anda bien en general, i.e. coincide con

$$H_k \xmapsto{s_i} H_k - 2\frac{\mathrm{tr}(H_k H_i)}{\mathrm{tr}(H_i H_i)} H_i$$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\chi_V : G \to \mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "\exp"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{ch}(V)"'] & G \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\chi_V"] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Corolario

$\mathrm{ch}(V) : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ *definida como antes, es una función invariante por W*

En $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathrm{ch}(V)(\tau) = \mathrm{tr}(e^{\tau H}|_V) = \mathrm{tr}(q^H|_V)$
es una función invariante por $\tau \leftrightarrow -\tau$,
o vista en q, invariante por $q \mapsto \dfrac{1}{q}$.

El caracter como objeto algebraico

$V \in \mathfrak{g}$-mod, de pesos / dim $V_\mu < \infty \forall \mu$, ch=la suma formal:

$$\operatorname{ch} V := \sum_\mu \dim V_\mu e^\mu$$

Si dim $V < \infty$, entonces $\mu \in \Lambda$ retículo $\cong \mathbb{Z}^\ell$

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}^\ell$$

$$\lambda_i(h_j) = \delta_{ij} \leftrightarrow e_i$$

$$\operatorname{ch} V \in \mathbb{C}[\Lambda] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}^\ell] \cong \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, \dots, q_\ell^{\pm 1}]$$

$$e^{\lambda_i} \quad \leftrightarrow \quad e_i \quad \leftrightarrow \quad q_i$$

Claramente valen $V \cong W \Rightarrow \operatorname{ch}(V) = \operatorname{ch}(W)$,

$$\operatorname{ch}(V \oplus W) = \operatorname{ch}(V) + \operatorname{ch} W$$

$$\operatorname{ch}(V \otimes W) = \operatorname{ch}(V) \cdot \operatorname{ch} W$$

(con el producto $e^\mu e^\lambda = e^{\mu+\lambda}$)

Weyl character formula

Caso $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $V = V(m)$,

$$\mathrm{ch}(V(m)) = q^{-m} + q^{-m+2} + \cdots q^{m-2} + q^{m}$$

$$= q^{-m}\sum_{k=0}^{m} q^{2k} = q^{-m}\frac{1-q^{m+2}}{1-q^{2}}$$

$$= q^{-(m+1)}\frac{1-q^{m+2}}{q^{-1}-q}$$

$$= \frac{q^{(m+1)} - q^{-(m+1)}}{q-q^{-1}}$$

Weyl character formula

Caso $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{ch}(V):\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$, $q=e^{\tau}$, $\tau H\in\mathfrak{h}=\mathbb{C}H$

$$\mathrm{ch}(V(m))=\frac{q^{(m+1)}-q^{-(m+1)}}{q-q^{-1}}$$

$\alpha\in\{\alpha\}=\Delta\subset\mathfrak{h}^*=(\mathbb{C}H)^*$, $\alpha(H)=2$,
$w(\alpha)=s_\alpha(\alpha)=-\alpha$, $s_\alpha(H)=-H$,
$V(m)=L(\lambda)$ con $\lambda(H)=m\Rightarrow\lambda=\frac{m}{2}\alpha$

$$q^m=e^{\tau m}=e^{\tau\lambda(H)}=e^{\lambda(\tau H)},\ q^{m+1}=e^{(\lambda+\frac{\alpha}{2})(\tau H)}$$

$$\therefore\ \mathrm{ch}(V(m))=\mathrm{ch}(L(\lambda))=\frac{e^{(\lambda+\frac{\alpha}{2})(\tau H)}-e^{(\lambda+\frac{\alpha}{2})(w\tau H)}}{e^{\frac{\alpha}{2}\tau H}-e^{-\frac{\alpha}{2}\tau H}}$$

Weyl character formula

λ tal que $\dim L(\lambda) < \infty$, la rep. simple de peso máximo λ, $H \in \mathfrak{h}$:

$$\mathrm{tr}(e^H) = \mathrm{ch}(L(\lambda))(e^H) = \frac{\sum_{\omega \in W} (-1)^\omega e^{(\lambda+\rho)(\omega H)}}{\prod_{\alpha>0}(e^{\frac{\alpha(H)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(H)}{2}})}$$

donde $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, $(-1)^\omega = (-1)^{\ell(\omega)}$,
$\ell(\omega)$ = longitud en W,

ch como expresión formal:

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{\omega \in W} (-1)^\omega e^{w(\lambda+\rho)}}{\prod_{\alpha>0}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})} \in \mathbb{C}[\Lambda] \subset \mathbb{C}[\tfrac{1}{2}\Lambda]$$