Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 21

Representaciones:
Módulos simples de eso máximo, condición de finitud.

Teorema

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ entonces la representación simple $L(\lambda)$ tiene dimensión finita $\Leftrightarrow \lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0$ para todo $i = 1, \dots, \ell$.

$\Rightarrow$ es clara, la vuelta es larga de ver, la dividimos en etapas.

Necesitaremos fórmulas de conmutación.
Notación: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \Phi$ un sistema de raíces simples

$$h_i = \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i}$$

$$e_i = \text{ vector no nulo en } \mathfrak{g}_{\alpha_i}$$

$$f_i = \text{ vector en } \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \text{ tal que } \kappa(e_i, f_i) = \tfrac{2}{|\alpha_i|^2}$$

$\therefore \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}f_i$ tiene las reglas de conmutación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lema

En $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*, para* $k \geq 0$*,* $i, j = 1, \ldots, \ell$*, vale:*

1. $[e_i, f_j^{k+1}] = 0$ *si* $i \neq j$*.*
2. $[h_j, f_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j) f_i^{k+1}$
3. $[e_i, f_i^{k+1}] = -(k+1) f_i^k (k - h_i)$

Demostración.

Ejercicio. $\square$

Lema

Misma notación, $v_0 \in L(\lambda)$ el vector de peso λ, con $h_i \cdot v = \lambda(h_i)v = m_i v$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ con $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces

1. *Si $\beta \in \Phi^+$ y $x \in \mathfrak{g}_\beta$, entonces x actúa loc. nilpo en V: $\forall v \in V$, $\exists\ N_0(v) \in \mathbb{N}$ tal que $x^{N_0(v)} \cdot v = 0$.*
2. *Si $i = 1, \dots, \ell$ entonces $\boxed{f_i^{m_i+1} \cdot v_0 = 0}$.*
3. *Los vectores f_i actúan de manera localmente nilpotente.*

Observación: en el punto 2 se usa que los pesos están en $\mathbb{N}_0$.

dem:

1. Los vectores e_j actúan de manera localmente nilpotente en $L(\lambda)$ (de hecho en $V(\lambda)$.

Los pesos de $L(\lambda)$ son $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i$ con $n_i \in \mathbb{N}_0$. Si $v \in V$ es homogéneo de peso $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i$ y $\beta = \sum_i n_i^0\alpha_i$

$$x \in \mathfrak{g}_\beta \Rightarrow x^N \cdot v \in \lambda - \Big(\sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i\Big) + N\Big(\sum_{i=1}^{\ell} n_i^0\alpha_i\Big)$$

que en algún momento son pesos que no aparecen en $L(\lambda)$ (no aparecen en $V(\lambda)$.

2. Si $i = 1, \ldots, \ell$ entonces $f_i^{m_i} \cdot v_0 = 0$.

En efecto, sea $w := f_i^{m_i+1} \cdot v_0$, sabemos que para $j \neq i$, $e_j \cdot w = 0$, pues e_j conmuta con f_i. Además, para $j = i$,

$$e_i \cdot w = e_i f^{m_i+1} \cdot v_0 = e_i f^{m_i+1} \cdot v_0 - f^{m_i+1} e_i \cdot v_0$$

$$= [e_i, f^{m_i+1}] \cdot v_0 = -(m_i + 1) f_i^{m_i} (m_i - h_i) \cdot v_0 = 0$$

pues

$$(m_i - h_i) \cdot v_0 = (m_i - m_i) v_0 = 0$$

Esto dice que w debería ser un vector de peso máximo, pero los vectores de peso máximo en un módulo simple tienen dimensión uno, con lo que w es un múltiplo de v_0, pero $w \in V_{\lambda-(m_i+1)\alpha_i}$, por lo tanto $w = 0$.

3. Los f_i actúan de manera localmente nilpotente.

Consideremos
$V \subseteq L(\lambda) = \{v \in L(\lambda) : \ f_i^N \cdot v = 0, \ N \gg 0, \forall i\}$. Sabemos que $v_0 \in V$ pues $f_i^{m_i+1} \cdot v_0 = 0$ para todo i.
Mostremos que V es un $\mathfrak{g}$-submódulo.
V es $\mathfrak{h}$-estable, pues si v es tal que $f_i^N \cdot v = 0$,

$$f_i^N H \cdot v = f_i^N H \cdot v - Hf_i^N \cdot v = [f_i^N, H] \cdot v$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} f_i^j [f_i, H] f_i^{N-j-1} \cdot v = \sum_{j=1}^{N-1} f_i^j \alpha_i(H) f_i f_i^{N-j-1} \cdot v$$

$$= N\alpha_i(H) f_i^N \cdot v = 0$$

Notar que la acción de $\mathfrak{h}$ no aumenta el grado de nilpotencia de cada f_i.

Si $j \neq i$, $f_i^N e_j \cdot v = e_j f_i^N \cdot v$. Para $i = j$, si $f_i^N \cdot v = 0$,

$$f_i^{N+1} e_i \cdot v = f_i^{N+1} e_i \cdot v - e_i f_i^{N+1} \cdot v$$

$$= [f_i^{N+1}, e_i] \cdot v$$

$$= (N+1) f_i^N (N - h_i) \cdot v = 0$$

pues el h_i no aumenta el grado de nilpotencia de v con respecto a f_i.

Veamos ahora que V es estable por multiplicación por los f_i. Recordemos las relaciones de Serre, para $i \neq j$,

$$0 = \mathrm{ad}_{f_i}^{1-A_{ij}}(f_j)$$

Sabemos que $A_{ij} = 0, -1, -2, -3 \Rightarrow \forall \mathfrak{g}$ ss vale

$$0 = \mathrm{ad}^4_{f_i}(f_j) = [f_i, [f_i, [f_i, [f_i, f_j]]]]$$

$$= f_i^4 f_j - 4 f_i^3 f_j f_i + 6 f_i^2 f_j f_i^2 - 4 f_i f_j f_i^3 + f_j f_i^4$$

equivalentemente

$$f_i^4 f_j = (4 f_i^3 f_j - 6 f_i^2 f_j f_i + 4 f_i f_j f_i^2 - f_j f_i^3) f_i$$

$$\Rightarrow f_i^4 (f_i^n f_j f_i^m v) \in \langle f_i^{n'} f_j f_i^{m'} v : n', m' \in \mathbb{N}_0,\ m' \geq m+1 \rangle$$
$$\Rightarrow f_i^{4N} f_j v \in \langle (f_i^n f_j f_i^m) f_i^N v : n, m \in \mathbb{N}_0 \rangle$$

$\therefore$ la multiplicación por f_j asigna elementos f_i-nilpotentes en elementos f_i-nilpotentes.
Obs: El grado de nilpotencia puede aumentar, pero la cota que hemos utilizado puede mejorarse pues depende de $1 - A_{ij}$, que hemos tomado como menor o igual que 4.
$L(\lambda)$ simple, $0 \neq V$ es $\mathfrak{g}$-estable $\Rightarrow V = L(\lambda)$.

Para la nilpotencia de la parte negativa:

Proposición

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0$, entonces, los pesos que aparecen en $L(\lambda)$ son permutados por la acción del grupo de Weyl.

Definimos una acciíon en $L(\lambda)$ que permuta las componentes homogéneas como el grupo de Weyl, a partir de exponencial endomorfismos localmente nilpotentes. Necesitaremos fórmulas..

Lema

$x, h \in \mathfrak{g}$ *tales que* $\mathrm{ad}_x^N(h) = 0$ *para* $N \gg 0$,
V *un* $\mathfrak{g}$*-módulo y supongamos*
$x|_V$ *es loc. nilpo.*

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad h \exp(x) \cdot v = \exp(x)\big(\exp(-\mathrm{ad}_x)(h)\big) \cdot v$$

dem: $\mathrm{ad}_x^N(h) = 0 \Rightarrow \exp(-\mathrm{ad}_x)(h))$ es una suma finita y da un elemento de $\mathfrak{g}$.

$$\big(\exp(-\mathrm{ad}_x)(h)\big)v =$$

$$= v - [x,h]v + \frac{[x,[x,h]]}{2}v + \cdots + (-1)^{N-1}\frac{1[x,[\cdots,[x,h]\cdots]]}{(N-1)!}v$$

es un elemento de la representación, donde x actúa nilpotentemente, pues

$$x\mathrm{ad}_x^n(h)v = [x, \mathrm{ad}_x^n h]v + (\mathrm{ad}_x^n(h))xv = \mathrm{ad}_x^{n+1}(h) + (\mathrm{ad}_x h)xv$$

$\Rightarrow \exp(x)(\exp(-\mathrm{ad}_x)(h))v$ es una suma finita y lo mismo para $\exp(x)v$.

Potencias bajas en $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$:

$$hx = [h,x]v + xh = -[x,h] + xh$$

$$hx^2 = (hx)x = (-[x,h] + xh)x$$
$$= [-x, -[x,h] + xh] + x(-[x,h] + xh)$$
$$= [-x, -[x,h]] + x[-x,h] - x[x,h] + x^2h$$
$$= \mathrm{ad}_{-x}^2(h) + 2x\mathrm{ad}_{-x}(h) + x^2h$$

Inductivamente se prueba que

$$hx^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \mathrm{ad}_{-x}^{n-k}(h)$$

$$\Rightarrow hx^n v = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \mathrm{ad}_{-x}^{k}(h) v$$

Divididiendo $n!$ y sumando sobre n ...

$$h \exp(x) v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \mathrm{ad}_{-x}^{k}(h) v \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\mathrm{ad}_{-x}^{k}(h)}{k!} v \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_{-x}^{n}(h)}{n!} v \right)$$

$$= \exp(x) \cdot (\exp(-\mathrm{ad}_x)(h) v) \qquad \checkmark$$

Dem. de la prop.

e_i y f_i son loc. nilpo en $L(\lambda) \Rightarrow$

$$\exp(e_i), \exp(f_i) : L(\lambda) \to L(\lambda)$$

Definimos

$$S_i := \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)$$

es un iso lineal, con inversa
$S_i^{-1} = \exp(-e_i)\exp(f_i)\exp(-e_i)$.
Sea $v \in L(\lambda)_\mu$, **Af. 2:** $S_i(v) \in L(\lambda)_{s_i(\mu)}$.

$$HS_i v = S_i(e^{-\mathrm{ad}_{e_i}} e^{\mathrm{ad}_{f_i}} e^{-\mathrm{ad}_{e_i}})(H)v$$

Af. 1: $(e^{-\mathrm{ad}_{e_i}} e^{\mathrm{ad}_{f_i}} e^{-\mathrm{ad}_{e_i}})(H)$ coincide con la acción de la reflexión con respecto a H_i, llamémosla $\sigma_i(H)$. Si por un momento suponemos válida la afirmación, obtenemos

$$HS_iv = S_i\sigma_i(H)v = S_i\mu(\sigma_i(H))v = \mu(\sigma_i(H))S_iv$$

$\Rightarrow S_iv$ es un vector de peso $\mu\sigma_i$, como queríamos ver. La proposición termina observando que todo elemento del grupo de Weyl está generado por reflexiones con respecto a raíces simples y demostrando la igualdad

$$(\dagger) \qquad (e^{-\mathrm{ad}_{e_i}} e^{\mathrm{ad}_{f_i}} e^{-\mathrm{ad}_{e_i}})(H) = \sigma_i(H)$$

Si H es tal que $\alpha_i(H) = 0$, tenemos que $\mathrm{ad}_{e_i}(H) = [e_i, H] = -\alpha_i(H)e_i = 0$; análogamente, $\mathrm{ad}_{f_i}(H) = 0$ y por lo tanto $S_i(H) = H$.

Llamemos $h = H_i$, $x = e_i$, $y = f_i$; la fórmula $(\dagger)$ anterior para $H = H_1$ es una fórmula en $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(2))$.

$$(\dagger) \qquad (e^{-\mathrm{ad}_e} e^{\mathrm{ad}_f} e^{-\mathrm{ad}_e})(h) = \sigma(h)$$

$$[x,[x,h]] = 0 \Rightarrow \exp(-\mathrm{ad}_x)(h) = h - [x,h] = h + 2x$$

$$\therefore \exp(-\mathrm{ad}_x)\exp(\mathrm{ad}_y)\exp(-\mathrm{ad}_x)(h) =$$

$$= \exp(-\mathrm{ad}_x)\exp(\mathrm{ad}_y)(h+2x)$$

También sabemos que $[y,x] = -h$,
$[y,[y,x]] = [y,-h] = -2y$, $[y,[y,[y,x]]] = [y,-2y] = 0$,

$$\Rightarrow \exp(-\mathrm{ad}_x)\exp(\mathrm{ad}_y)(h+2x)$$

$$= \exp(-\mathrm{ad}_x)(h+2x+[y,h+2x]+\frac{1}{2}[y,[y,h+2x]])$$

$$= \exp(-\mathrm{ad}_x)(h+2x+2y-2h-2y) = \exp(-\mathrm{ad}_x)(-h+2x)$$

y finalmente

$$\exp(-\mathrm{ad}_x)(-h+2x) = -h+2x-[x,-h+2x]$$

$$= -h+2x-2x = -h$$

En conclusión

$$(e^{-\mathrm{ad}_{e_i}} e^{\mathrm{ad}_{f_i}} e^{-\mathrm{ad}_{e_i}})(H_i) = -H_i$$

$\therefore e^{-\mathrm{ad}_{e_i}} e^{\mathrm{ad}_{f_i}} e^{-\mathrm{ad}_{e_i}}$ cambia signo a H_i y fija $H_i^{\perp}$.

Corolario

Mismas hipótesis que la prop. anterior, $\alpha \in \Phi^+$*,* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$
Entonces la acción de y *en* $L(\lambda)$ *es localmente nilpotente.*

dem: $W \ni \sigma_\alpha$= la reflexión c.r.a α.

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha_{i1}} \cdots \sigma_{\alpha_{is}} \Rightarrow S_\alpha := S_{i_1} \cdots S_{i_s}$$

donde S_i es como antes:

$$S_i = \exp(e_i) \exp(-f_i) \exp(e_i) : L(\lambda) \to L(\lambda)$$

Notar que $S_\alpha : L(\lambda) \to L(\lambda)$ es un iso lineal, y verifica

$$S_\alpha(V_\mu) \subset V_{\sigma_{\alpha_{i_1}} \cdots \sigma_{\alpha_{i_s}}(\mu)} = V_{\sigma_\alpha(\mu)},$$

$\Rightarrow \widetilde{Y} = S_\alpha y S_\alpha^{-1} : L \to L$ verifica

$$\widetilde{Y}(V_\mu) = S_\alpha y S_\alpha^{-1}(V_\mu) \subseteq S_\alpha y(V_{\sigma_\alpha(\mu)})$$

$$\subseteq S_\alpha(V_{\sigma_\alpha(\mu)-\alpha}) \subseteq V_{\sigma_\alpha(\sigma_\alpha(\mu)-\alpha)} = V_{\mu+\alpha}$$

$\Rightarrow \widetilde{Y}$ es loc. nilpo $\Rightarrow Y$ es loc. nilpo porque es un endomorfismo conjugado a $\widetilde{Y}$.

Ahora mostramos $\dim L(\lambda) < \infty$:

$$L(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0 = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)v_0$$

Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\} = \Phi^- = -\Phi^+$ una numeración de Φ^-
$0 \neq y_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$
por PBW, tenemos un sistema de generadores de $L(\lambda)$, como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, de la forma

$$L(\lambda) = \sum_{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbb{N}_0^r} y_1^{n_1}\cdots y_r^{n_r} v_0$$

y_r actúa loc. nilpo $\Rightarrow \exists N_r = N_r(y_r, v_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$y_r^{N_r} v_0 = 0$$

$$\Rightarrow L(\lambda) = \sum_{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}_0^r, n_r \le N_r} y_1^{n_1}\cdots y_r^{n_r} v_0$$

y_{r-1} es loc. nilpo. Para $k = 0, 1, 2, \dots, N_r$, $\exists N_{r-1}(k)$ tal que

$$y_{r-1}^{N_{r-1}(k)} y_r^k v_0 = 0$$

Si $N_{r-1} = max\{N_{r-1}(k), k = 0, \dots, N_r\}$,

$$y_{r-1}^{N_{r-1}} y_r^k v_0 = 0 \ \forall k$$

$$\Rightarrow L(\lambda) = \sum_{(n_1,\dots,n_r): n_r \le N_r, n_{r-1} \le N_{r-1}} y_1^{n_1}\cdots y_r^{n_r} v_0$$

Continuando este proceso, $\exists (N_1, \dots, N_r) \in \mathbb{N}_0^r$ tal que

$$L(\lambda) = \sum_{(n_1,\dots,n_r): n_i \le N_i \ \forall i} y_1^{n_1}\cdots y_r^{n_r} v_0 \quad \Rightarrow \dim L(\lambda) \le \prod_{i=1}^{r} N_i$$