Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Clase 20

Representaciones:
Vectores de peso máximo y Módulos de Verma

Módulos de peso

$\mathfrak{g}$ ss compleja, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan.
V un $\mathfrak{g}$-módulo, (no necesariamente de dim. finita), definimos

$$V' = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu \subseteq V$$

donde $V_\mu = \{v \in V : H \cdot v = \mu(H)v, \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$.

Notar que los V_μ son subespacios que están en suma directa (como esp. vec), pues autovectores de autovalores distintos son linealmente independientes.

Decimos que V es un módulo o representación de peso si $V = V'$. En el caso dim $V < \infty$, V siempre es de peso.

Lema

- $f : V \to W$ *morfismo* $\Rightarrow f(V_\mu) \subseteq W_\mu$
- $v \in S \subseteq \bigoplus_\mu V_\mu$, $v = \sum_\mu v_\mu \Rightarrow v_\mu \in S$ $(\forall \mu)$
- $V \twoheadrightarrow W$, V *es de pesos* $\Rightarrow W$ *también*

Definición

V una representación de $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{h}, \Phi, \Delta$.

V es un **módulo cíclico de peso máximo** si V es una representación de pesos y V está generado, como representación, por un vector $v_0 \in V_\lambda$, para cierto $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, con la propiedad

$$xv_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Phi^+$$

En estas condiciones, v_0 se dice un vector cíclico de peso máximo λ.

Proposición

V simple con vector v_0 de peso máximo λ, entonces, los pesos μ que aparecen en V son de la forma

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i, \qquad\qquad n_i \in \mathbb{N}_0$$

$\dim V_\lambda = 1$, *y para cada peso* μ, $\dim V_\mu < \infty$. *En particular, la dimensión de V es a lo sumo numerable.*

Observación

Esta proposición justifica el nombre de ”peso máximo”. También demuestra la proposición que habíamos dejado para más adelante.

Demostración.

$$V = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_0 = \overbrace{\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \cdot \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+)}^{PBW!} v_0 = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot v_0$$

Como $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$, entonces $(-\beta_i \in \Phi^-)$

$$\mathfrak{g}_{-\beta_{i1}} \mathfrak{g}_{-\beta_{i2}} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{g}_{-\beta_{is}} V_\lambda \subseteq V_{\lambda-(\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots+\beta_{is})}$$

$\square$

Módulos de Verma

Sea $v_0 \in V$ tal que $\exists \lambda \in \mathfrak{h}^*$ con

$$Hv_0 = \lambda(H)v_0, \qquad x \cdot v_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha > 0$$

Cambiando V por $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0$, supondremos que v_0 genera V. Como $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0$ está generado por v_0, tenemos un epimorfismo

$$\pi : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0$$

$$u \mapsto uv_0$$

Obs: $H - \lambda(H)1 \in \mathrm{Ker}\pi$, idem $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Phi^+}$.

Def: $I_\lambda := \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{U}(\mathfrak{g})(h_i - \lambda(h_i)) + \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathrm{U}(\mathfrak{g})E_\alpha$, el ideal a izq. generado por los $(h_i - \lambda(h_i)1)$ y $\{E_\alpha\}_{\alpha > 0}$.

$$\boxed{V(\lambda) := \mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda}$$

Módulos de Verma

Consecuencia: Sea $v_0 \in V$ tal que

$$Hv_0 = \lambda(H)v_0, \qquad x \cdot v_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha > 0$$

Entonces existe un único epimorfismo determinado por

$$V(\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0$$

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda \ni \overline{1} \mapsto v_0$$

Corolario

$v_0 \in V$ de peso máx $\Rightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})v_0 \subseteq V$ es automáticamente un módulo de pesos.

Módulos de Verma

2da construcción y base de $V(\lambda)$ como espacio vectorial:

[Poincaré - Birkhoff - Witt] implica

Proposición

$\mathfrak{g}$ ss / $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$, Φ, Φ^+, $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha<0} \mathfrak{g}_\alpha$ entonces $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$, $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^+)$ y $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ son subálgebras de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ y

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+)$$

como espacio vectorial; más aún, si $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ entonces

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{b})$$

como $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$-módulo a izq. y $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-módulo a derecha.

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, en $\mathbb{C}$ definimos la siguiente estructura de $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$-módulo:

$$x \cdot 1 = 0 \; \forall x \in \mathfrak{n}^+, \quad H \cdot 1 = \lambda(H), \; \forall H \in \mathfrak{h}$$

Denotamos este $\mathfrak{b}$-módulo por $\mathbb{C}_\lambda$. **Afirmamos:**

$$V(\lambda) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

dem: llamamos $v_0 := 1 \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} 1$. Tenemos mapas

$$V(\lambda) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

$$\overline{1} \mapsto v_0$$

y

$$V(\lambda) \leftarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$$

$$\overline{u} \longleftarrow u \otimes 1$$

Corolario

Como espacio vectorial, y como $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$*-módulo,*

$$V(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes 1$$

dem:

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \\ &\cong (\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{b})) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \\ &\cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes (\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda) \\ &\cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda \end{aligned}$$

Ejemplo

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}Y \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X$.
$\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}X$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$, $\mathfrak{b} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X$.
$\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ está determinada por $\lambda(H) = \lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, $V(\lambda) = \mathbb{C}[Y] \otimes 1$

Una base es $\{Y^n \otimes 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$. La acción, por ejemplo:

$$X \cdot (Y \otimes 1) = XY \otimes 1 = (XY - YX + YX) \otimes 1$$
$$= H \otimes 1 + YX \otimes 1 = 1 \otimes H \cdot 1 + Y \otimes X \cdot 1 = \lambda \otimes 1 + 0$$

$$H \cdot (Y \otimes 1) = HY \otimes 1 = (HY - YH + YH) \otimes 1$$
$$= -2Y \otimes 1 + YH \otimes 1 = -2Y \otimes 1 + Y \otimes H \cdot 1 = -2Y \otimes 1 + \lambda Y \otimes 1$$
$$= (\lambda - 2)Y \otimes 1$$

En general,

Corolario

Sea $\{y_1, \ldots, y_m\}$ *una base de* $\mathfrak{n}^-$ *como espacio vectorial, entonces el conjunto* $\{y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_m^{n_m} \otimes 1 : (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}_0^m\}$ *es una base de* $V(\lambda)$ *como espacio vectorial.*

Corolario

Sea $\mu \in \mathfrak{h}^*$ *y* $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$*, con* $n_i \in \mathbb{N}_0$*,* $\alpha_i \in \Delta$ *entonces la dimensión de* $V(\lambda)_{\mu+\beta}$ *es finita; además, la dimensión de* $V(\lambda)_\lambda$ *es igual a* 1*.*

Proposición

Sea $V(\lambda)_+ := \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V(\lambda)_\mu = \bigoplus_{\mu : \lambda > \mu} V(\lambda)_\mu$*,*
entonces todo submódulo está contenido en $V(\lambda)_+$*.*

$\exists!$ *submodulo propio maximal* M*.*

$L(\lambda) := V(\lambda)/M$ *es simple y tiene un vector de peso máximo* λ*.*

Corolario

Si V *es simple y tiene un vector de peso máximo, entonces* $V \cong L(\lambda)$ *para un único* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*.*
En particular, V *es de peso y* $(\dim V)_\lambda = 1$*.*

dem: Sea W un submódulo propio de $V(\lambda)$ y $0 \neq v \in W$, si escribimos $v = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} v_\mu$, entonces sabemos que cada $v_\mu \in W$.

Si llegara a ocurrir que $v_\lambda \neq 0$ entonces W contendría al generador de $V(\lambda)$, con lo cual W no sería propio.

Proposición (Dixmier)

$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} < \infty$, *$S$ un $\mathfrak{g}$-módulo simple, entonces* $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}$.

Sabíamos el resultado para $\dim S < \infty$ y una manera de demostralo es considerar $f : S \to S$ un endomorfismo, que en dimensión finita tiene con seguridad un autovalor y el subespacio de autovectores de ese autovalor es un submódulo no nulo, que por lo tanto coincide con S. Para el caso $\dim S = \infty$ daremos otra demostración, que también se puede aplicar para el caso de dimensión finita.

Si $0 \neq v \in S \Rightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})v \subset S$ y por simplicidad $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v = S$. Luego $\dim S$ es a lo sumo numerable.
$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$ es un álgebra de división y como v genera S, si $f \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S) \Rightarrow f$ está determinado $f(v)$,

$$\therefore \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S) & \to & S \\ f & \mapsto & f(v) \end{array}$$

es inyectiva $\Rightarrow \dim \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$ es a lo sumo numerable.

Si $f \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$, $\mathbb{C}(f)$:=el menor subcuerpo de $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$ que contiene a f (y a $\mathbb{C}$).

Si f es algebraico sobre $\mathbb{C} \Rightarrow f \in \mathbb{C}$ (es decir, $f = z_0 \cdot \mathrm{Id}$)

Si f es trascendente $\Rightarrow \mathbb{C}(t) \cong \mathbb{C}(f) \subset \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$, pero $\left\{ \frac{1}{t-z_0} : z_0 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}(t)$ es l.i. Absurdo porque $\dim \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S)$ es a lo sumo numerable.

Teorema

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ entonces la representación simple $L(\lambda)$ tiene dimensión finita $\Leftrightarrow \lambda(h_i) \in \mathbb{N}_0$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$.

$\Rightarrow$ es clara, la vuelta es larga de ver, la dividimos en etapas.