Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 2: cultura general topológica en los grupos cláscos

Observaciones topológicas

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ tiene una topología inducida obvia.

$$\det(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \mathrm{GL}(n\mathbb{R}) = \overset{1}{\det}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$\therefore$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$, no es compacto ni conexo.

Tiene 2 componentes conexas.

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tampoco es compacto.
Por ej. $\left\{ diag(x, x^{-1}, 1, \cdots, 1) : 0 \neq x \in \mathbb{R} \right\}$
es un subconjunto no acotado.

o bien,

$$\left\{ diag\big(n, 1/n, 1, \cdots, 1\big) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

no tiene subsucesiones convergentes

$O(n, \mathbb{R})$ es compacto, es un cerrado contenido en $\underbrace{S^{n-1} \times \cdots S^{n-1}}_{n-veces}$

$O(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : AA^t = \mathrm{Id}\}$ NO es compacto

$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : AA^* = \mathrm{Id}\}$ SI es compacto

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ no es compacto, pero $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ sí es compacto.

La dimensión compleja de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ es $n^2 - 1$, por lo que su dimensión real es $2(n^2 - 1)$. Por ejemplo $SL(2,\mathbb{C})$ tiene dimensión compleja 3, pero dimensión real 6.

$\mathrm{SU}(n)$ es un grupo real, no es un grupo complejo, tiene dimension real $n^2 - 1$.

Por ejemplo

$$SU(2) = \left\{ U = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : zw \mathfrak{n} \mathbb{C},\ \det U = 1 \right\} \cong S^3$$

tiene dimensión 3.

$SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C})$ jamás puede ser denso con la topología usual, pero (hecho) es denso Zariski!

Hechos

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tiene 2 componentes conexas, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es conexo.

$\mathrm{SO}(3)$ es conexo (porqué?), no es simplemente conexo, $SU(2)$ es simplemente conexo, de hecho, es el revestimiento universal de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.
Como esp. top:

$$SU(2) \cong S^3$$

(Gram-Schmidt!)
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tiene el tipo de homotopía de $O(n, \mathbb{R})$,
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tiene el tipo de homotopía de $SO(n, \mathbb{R})$,
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tiene el tipo de homotopía de $U(n)$,
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ tiene el tipo de homotopía de $SU(n, \mathbb{R})$,

Gram-Schmidt

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \overset{h}{\sim} O(n,\mathbb{R})$

T_n^+=triangulares inferiores con positivos en la diagonal, como esp. top

$$\cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \cong \mathbb{R}^N \quad (N = n(n+1)/2)$$

Ejercicio! $O(n,\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{\mathrm{Id}\}$

$$M = TO = T'O' \Rightarrow (T')^{-1}T = O'O^{-1}$$

$$\Rightarrow T = T', \quad O = O'$$

$$\therefore m : T_n^+ \times O(n,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

Tarea: Gram-Schmidt dice que es suryectiva, y con inversa continua

Grupos topológicos

$$\mathrm{GL}_n := \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det M \neq 0\} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^{n\times n}$$

La multiplicación de matrices es bilineal $\Rightarrow$

$$m : \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$$

$$(M, N) \mapsto M \cdot N$$

es continua. La fórmula de la inversa

$$\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$$

$$M \mapsto M^{-1} = \frac{Cof(M)}{\det M}$$

es una función racional $\Rightarrow$ continua donde el denominador no se anula, es decir, es continua en GL_n

Grupos topológicos

Un **grupo continuo**, o **grupo topológico**, es un espacio topológico G con una estructura de grupo tal que la multiplicación y la inversión son continuas.

Grupos topológicos

Si S, G son grupos continuos, una función $f : S \to G$ se dice un homomorfismo de grupos continuos si es un morfismo de grupos abstractos y es continua.

Una representación (continua) de G en un espacio V de dim finita es un morfismo continuo de grupos $G \to \mathrm{GL}(V)$

notar $\dim_k(V) = n \Rightarrow$

$$V \cong k^n \ \text{ y } \ GL(V) \cong \mathrm{GL}(n, k)$$

$(k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$

Grupos topológicos

G grupo continuo

- S subgrupo de $G \Rightarrow S$ es grupo continuo con la topología iducida.
- $S \lhd G \Rightarrow G/S$ es grupo continuo con la topología cociente.
- G/S Hausdorff $\Leftrightarrow S = \overline{S}$
- Si G_0= la componente conexa de la identidad de G, $\Rightarrow G_0 \lhd G$ y la topología de G/G_0 es discreta.

Grupos topológicos

Cualquier subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo continuo.

Si $S \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{S}$, la clausura de S en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$
(atención, que no es la clausura en $\mathbb{R}^{n \times n}$!)
es un subgrupo cerrado.

Grupos de Lie

Un grupo de Lie es un grupo continuo G donde además

G es una variedad diferenciable,

$m : G \times G \to G$
y la inversión $I : G \to G$ son suaves.

Grupos de Lie

Ejemplos: Subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dados por ecuaciones

$$Aff_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) : a_{21} = 0,\ a_{22} = 1 \right\}$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$

$$(\mathbb{R}^n, +) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v_1 \cdots & v_n \\ 0 & & \\ \vdots & \mathrm{Id}_n & \\ 0 & & \end{pmatrix} : (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$$