Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Clase 19

Representaciones:
Vectores de peso máximo, Álgebra envolvente.

Representaciones de peso máximo

$\mathfrak{g}$ semisimple compleja, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de Cartan, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ raíces simples, $\boxed{\boxed{h_i := \frac{2}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} H_{\alpha_i}}}$. Sabemos:

Lema

dim $V < \infty$ *una rep. de* $\mathfrak{g}$, *entonces*

- V *es suma directa de simples.*
- h_i *(simult.) diagonalizables, autovalores enteros.*
- $\exists 0 \neq v_0 \in V$ *tal que* $x.v_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *con* $\alpha > 0$.
- $h_i v_0 = m_i v_0$, $m_i \in \mathbb{N}_0$.

Coro: dim $V < \infty$ rep. simple $\rightsquigarrow (m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$.

Proposición

dim $V < \infty$ *simple* $\Rightarrow \dim\{v \in V : x.v = 0\ \forall x \in \mathfrak{n}^+\} = 1$.

Además, $\{v \in V : x.v = 0\ \forall x \in \mathfrak{n}^+\}$ *es de la forma* V_λ

y todo V_μ *que aparece en* V *es de la forma*

$$V_\mu = V_{\lambda - \sum_i n_i \alpha_i}$$

con n_i *enteros no negativos.*

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ está dado por su valor en base:

$$\lambda(h_i) = m_i$$

v_0 se llama "vector de peso máximo".

Para la dem, necesitaremos el álgebra envolvente.

El Álgebra envolvente universal

Dada $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, **SE BUSCA:**
$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ álgebra asociativa, con una aplicación $\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ tal que

$$\iota([x, y]) = \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)$$

y universal con esa propiedad:

Si A es alg. asociativa, $Lie(A) := A$ es Lie con $[a, b] = ab - ba$, y si $f : \mathfrak{g} \to Lie(A)$ morfismo de Lie, queremos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"] & Lie(A) \arrow[r, equal] & A \\
\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \arrow[urr, dotted, "\exists! \widetilde{f} \ \textit{morfismo de alg asoc}"'] & &
\end{tikzcd}$$

En otras palabras:

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))$$

El Álgebra envolvente universal

Definición / construcción:

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := \frac{T\mathfrak{g}}{\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle}$$

Dado X conjunto, el conjunto

$$M(X) := \{e\} \cup X \cup (X \times X) \cup (X \times X \times X) \cup \cdots \cup X^{\times n} \cup \cdots$$

es un monoide asociativo con neutro e y producto de concatenación

$$(x_1, \cdots, x_p) \cdot (y_1, \cdots, x_q) := (x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, x_q)$$

Tiene la propiedad, para todo monoide M:

$$\mathrm{Hom}_{Mon}(M(X), M) \cong Func(X, M)$$

El álgebra asociativa libre

W un $\mathbb{K}$-e.v.

$$TW := \bigoplus_{n=0}^{\infty} W^{\otimes n} = k \oplus W \oplus W^{\otimes 2} \oplus W^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

con el producto (asociativo)

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes v_m$$

Si W tiene base X, entonces TW tiene base $M(X)$.

Proposición

A $\mathbb{K}$-algebra asociativa, entonces

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(TW, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, A)$$

$$f \mapsto f|_W$$

El álgebra envolvente universal

Cocientes: A asociativa, $I \subset A$ un ideal, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(A/I, B) \cong \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(A, B) : f(I) = 0 \}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & B & f(a) \\
\overline{a} & A/I \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

El álgebra envolvente universal

Si $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie, definimos
su álgebra envolvente universal, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ como

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g}/\langle\, x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\,\rangle$$

Proposición

$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, A una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa.
$Lie(A) := (A, [,])$ con $[a, b] = ab - ba$.

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))$$

Corolario

V un espacio vectorial, $A = \mathrm{End}(V)$, luego $Lie(A) = \mathfrak{gl}(V)$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)) = \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(\mathrm{End}(V)))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{k-alg}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}(V))$$

$\therefore$ $\mathfrak{g}$-módulo $\equiv$ $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-módulo.

Ejemplo: $\mathfrak{g} = kx$, el álgebra de Lie de dimensión 1.
Entonces un $\mathfrak{g}$-módulo $\equiv k[x]$-módulo $\equiv$ un espacio V con un endomorfismo $f = x \cdot -$

Ejemplo: $\mathfrak{g} = kx_1 \oplus \cdots \oplus kx_n$, el álgebra de Lie abeliana de dimensión n. Entonces

un $\mathfrak{g}$-módulo $\equiv$ un $k[x_1, \ldots, x_n]$-módulo
$\equiv$ un espacio V con un n endomorfismos que conmutan.

Ejemplo: $\mathfrak{g} = kx \oplus ky$, el álgebra de Lie con corchete $[x, y] = y$,

un $\mathfrak{g}$-módulo $\equiv$ un esp. vect. V con dos endomorfismos f, g tales que

$$fg - gf = g$$

$\equiv$ un $k\{x, y\}/(xy - yx - y)$-módulo

Teorema (Poincaré - Birkhoff - Witt)

Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es base de* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{K}$*,*
entonces el conjunto de monomios
$\left\{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} : (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n\right\}$
es una $\mathbb{K}$*-base de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*.*
Es decir, $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *como* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial.*

dem: por ejemplo Humphreys, sección 17.4,
o Bergman (diamond Lemma)

Obs: si interpretamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}(G)^G = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(G))^G$, entonces

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Diff}(G)^G = \mathbb{R}\langle \mathfrak{X}(G)^G \rangle \subset \mathrm{End}(C^\infty(G))$$

Ejemplo raro: V espacio vectorial. $L(V)$="el álgebra de Lie libre en V". Verifica

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(L(V), \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{g})$$

En particular, si A es asociativa,

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(L(V), Lie(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, A) \cong \mathrm{Hom}(TV, A)$$

pero también

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(L(V), Lie(A)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{U}(L(V)), A)$$

Concluimos $\mathrm{U}(L(V)) = TV$.

Sub-ejemplo: ÁLgebra de Lie libre en 2 generadores
$V = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y$.
Base de TV= palabras en x,y:

$$\left\{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxx, xxy, xyx, xyy, yxx, yxy, yyx, yyy, \dots\right\}$$

Sistema de generadores de $L(V)$:

$$\underbrace{x, y}_{L_1}, \underbrace{[x, y] = xy - yx}_{L_2=[L_1,L_1]}, \underbrace{[x, [x, y]], [y, [x, y]]}_{L_3=[L_1,L_2]},$$

$$\underbrace{{\color{blue}[x,[x,[x,y]]]}, {\color{teal}[y,[x,[x,y]]}, {\color{teal}[x,[y,[x,y]]]}, {\color{green}[y,[y,[x,y]]}, {\color{red}[[x,y],[x,y]]}}_{L_4=[L_1,L_3]+[L_2,L_2]}$$

para ver l.i. los veo en TV:
El ultimo es cero por antisim.
El 1ero y 4to son l.i. por cantidad de x's o de y's.
El 2do y 3ero no es tan claro, pero los miro en TV:

$$[x, y] = xy - yx$$

$$[x, [x, y]] = xxy - xyx - xyx + yxx = xxy - 2xyx + yxx$$

$$[y, [x, y]] = yxy - yyx - xyy + yxy = -yyx + 2yxy - xyy$$

$$[x, [y, [x, y]]] = -xyyx + 2xyxy - xxyy + yyxx - 2yxyx + xyyx$$

$$= +2xyxy - xxyy + yyxx - 2yxyx$$

$$[y, [x, [x, y]]] = yxxy - 2yxyx + yyxx - xxyy + 2xyxy - yxxy$$

$$= -2yxyx + yyxx - xxyy + 2xyxy$$

son iguales! una base de L_4 es

$$\{[x,[x,[x,y]]], [y,[x,[x,y]]=[x,[y,[x,y]]], [y,[y,[x,y]]\}$$

$L_5 = [L_1, L_4] + [L_2, L_3]$, etc, $L(V) = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \cdots$

Definición

Sea A una $\mathbb{K}$-álgebra; una sucesión de subespacios $\mathcal{F}$:

$$0 = F_{-1} \subseteq F_0 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \cdots$$

tales que $A = \cup_{n\geq 0} F_n$ y $F_p \cdot F_q \subseteq F_{p+q}$ para todo $p, q \geq 0$ se dice una **filtración** de A. En este caso, A se dice filtrada por $\mathcal{F}$.

Ejemplos

1. En $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, es filtrada con el grado polinomial total: $F_d = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$, los polinomios de grado total $\leq d$.
2. V esp. vect $\rightsquigarrow$ TV es filtrada máxima de tensores que aparecen en una suma.
3. Si $\pi : B \to A$ es un epi de álgebras *suryectivo* y B filtrada $\Rightarrow$ A es filtrada. $\therefore \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ es filtrada.

Definición

A una $\mathbb{K}$-álgebra es **graduada** si, como esp. vect.

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

y $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Definición

Para A filtrada por $\mathcal{F}$ se define el graduado asociado $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A$ vía:

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n = F_n / F_{n-1}$$

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A = \bigoplus_n \mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n$$

Proposición

A filtrada por $\mathcal{F}$ Entonces

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A := \bigoplus_{n \geq 0} (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A)_n = \bigoplus_{n} (F_n / F_{n-1})$$

es álgebra graduada con producto

$$(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A)_n \times (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A)_m \to \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A$$

$$(\overline{x} \ mod \ F_{n-1}, \overline{y} \ mod \ F_{m-1}) \mapsto \overline{xy} \ mod \ F_{n+m-1}$$

Obs: en $\mathrm{gr}U(\mathfrak{g})$ el producto es conmutativo, por ejemplo si $x, y \in \mathfrak{g} \subset F_1(U(\mathfrak{g}))$, entonces

$$xy \in F_2(U(\mathfrak{g}))$$

idem yx, pero

$$xy - yx = [x, y] \in \mathfrak{g} \subset F_1(U(\mathfrak{g}))$$

$$\Rightarrow \overline{x}\,\overline{y} - \overline{y}\,\overline{x} = \overline{xy - yx} = \overline{[x, y]} = 0 \in F_2/F_1 = \mathrm{gr}_2$$

Proposición

A álgebra filtrada, $\mathcal{B}_n$ una $\mathbb{K}$-base de $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(A)_n = F_n/F_{n-1}$, entonces $\mathcal{B} = \coprod_n \mathcal{B}_n$ es una base de $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} A$.

Si $\mathcal{B}_n = \{\overline{a}_1^n, \ldots, \overline{a}_{s(n)}^n\}$ elegimos $a_i^n \in F_n$ tales que

$$a_i^n = \overline{a}_i^n \; mod F_{n-1}$$

$\widehat{\mathcal{B}}_n := \{a_1^n, \ldots, a_{s(n)}^n\} \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}} = \coprod_n \widehat{\mathcal{B}}_n$ es una base de A.

Teniendo en cuenta la estructura multiplicativa de $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, el teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt se puede enunciar como

Teorema (Poincaré - Birkhoff - Witt)

$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una $\mathbb{K}$-base de $\mathfrak{g}$, entonces el epimorfismo de álgebras

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathrm{grU}(\mathfrak{g})$$

es un iso. En particular, el conjunto de monomios $\{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} : (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$ es una $\mathbb{K}$-base de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Definición

V una representación de $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{h}, \Phi, \Delta$.

V es un **módulo cíclico de peso máximo** si V es una representación de pesos y V está generado, como representación, por un vector $v_0 \in V_\lambda$, para cierto $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, con la propiedad

$$xv_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Phi^+$$

En estas condiciones, v_0 se dice un vector cíclico de peso máximo λ.

Proposición

V simple con vector v_0 de peso máximo λ, entonces, los pesos μ que aparecen en V son de la forma

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i, \qquad\qquad n_i \in \mathbb{N}_0$$

$\dim V_\lambda = 1$, *y para cada peso μ,* $\dim V_\mu < \infty$. *En particular, la dimensión de V es a lo sumo numerable.*

Observación

Esta proposición justifica el nombre de ”peso máximo”. También demuestra la proposición que habíamos dejado para más adelante.

Demostración.

Consideremos el subespacio $\widetilde{V} = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_0$. Como V está generado por v_0 debe ser $\widetilde{V} = V$. Por otro lado, $\mathfrak{h} \cdot V_\lambda \subseteq V_\lambda$ y $\mathfrak{n}^+ V_\lambda = 0$, es decir,

$$V = \widetilde{V} = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_0 = \overbrace{\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \cdot \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+)}^{PBW!} v_0 = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot v_0$$

Como $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$, entonces $(-\beta_i \in \Phi^-)$

$$\mathfrak{g}_{-\beta_{i1}} \mathfrak{g}_{-\beta_{i2}} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{g}_{-\beta_{is}} V_\lambda \subseteq V_{\lambda-(\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots+\beta_{is})}$$

Si escribimos a cada β como combinación lineal entera de raíces de simples, como las $-\beta$ son raíces negativas, tendremos que los V_μ que aparecen son de la forma $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $\square$