Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Clase 18

Representaciones:

Acción del casimir $\rightsquigarrow$ 1er lema de Whitehead
y teorema de completa reducibilidad de Weyl

Representaciones

Corolario (de la descomposición en espacios raíz de $\mathfrak{g}$)

$$\mathfrak{n}^+ := \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- := \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ *como espacio vectorial,* $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$ *son subálgebras de Lie, también* $\mathfrak{b}_+ := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus$, $\mathfrak{b}_- := \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$ *son subálgebras de Lie.*
2. $\mathfrak{n}^+$ *y* $\mathfrak{n}^-$ *son subálgebras nilpotentes y actúan* ad*-nilpotentemente en* $\mathfrak{g}$*.*
3. $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$ *son subálgebras solubles.*
4. *Si* V *es rep. de* $\mathfrak{g}$ *de dimensión finita* $\Rightarrow \exists 0 \neq v_0 \in V$ *tal que* $E_\alpha . v_0 = 0 \; \forall \alpha \in \Phi^+$*.*

Teorema

dim $S < \infty$ *representación simple de* $\mathfrak{g}$, *entonces*

$$\omega|_S = cte(S)\ \mathrm{Id}$$

con $\boxed{cte(S) = 0 \Leftrightarrow S \cong \mathbb{C}}$.

Más aún, si V *es una representación y* $v_0 \in V$ *es tal que*

$$E_\alpha v_0 = 0, \qquad \forall \alpha \in \Phi^+$$

y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *es tal que* $Hv_0 = \lambda(H)v_0, \forall H \in \mathfrak{h}$

$$\boxed{\boxed{\Rightarrow \omega \cdot v_0 = \kappa(\lambda + 2\rho, \lambda)v_0}}$$

donde $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$

Corolario

Vale el Lema de Whitehead para $\mathfrak{g}$*:*

$\dim V < \infty \Rightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V) = InDer(\mathfrak{g}, V)$.

Corolario

Vale el Teorema de Weyl para $\mathfrak{g}$*:*

$\dim V < \infty \Rightarrow V$ *es suma directa de simples.*

dem: S simple $\Rightarrow$ (Schur) $\omega|_S = cte\mathrm{Id}$
q.v.q. $S \neq \mathbb{C} \Rightarrow$ el escalar es no nulo. Calculemos *cte*.
Elijamos $\{E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ tal que $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Luego,

$$\omega = \sum_{\alpha\in\Phi^+}(E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + E_{-\alpha}\otimes E_\alpha) + \sum_i H_i \otimes H^i$$

donde $\{H_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ recorre una base de $\mathfrak{h}$ y $\{H^i : 1 \leq i \leq \ell\}$ es la base dual c.r.a κ.
Calculemos primero uno de los dos sumandos en v_0:

$$\sum_{\alpha\in\Phi^+}(E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha}E_\alpha)v_0$$

$$= \sum_{\alpha\in\Phi^+} E_\alpha E_{-\alpha} v_0 = \sum_{\alpha\in\Phi^+}(E_\alpha E_{-\alpha} - E_{-\alpha}E_\alpha)v_0$$

$$= \sum_{\alpha\in\Phi^+} H_\alpha v_0 = \sum_{\alpha\in\Phi^+}\lambda(H_\alpha)v_0 = \sum_{\alpha\in\Phi^+}\kappa(\alpha,\lambda)v_0 = \kappa(2\rho,\lambda)v_0$$

Para la parte en $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ del Casimir, H_i, H^i bases duales implica

$$H = \sum_i \kappa(H, H_i) H^i = \sum_i \kappa(H, H^i) H_i$$

Ahora

$$\sum_i H_i H^i v_0 = \sum_i \lambda(H_i)\lambda(H^i) v_0$$

$$= \sum_i \kappa(H_\lambda, H_i)\kappa(H_\lambda, H^i) v_0 = \sum_i \kappa\Big(H_\lambda, \kappa(H_\lambda, H^i) H_i\Big) v_0$$

$$= \kappa\Big(H_\lambda, \sum_i \kappa(H_\lambda, H^i) H_i\Big) v_0 = \kappa(H_\lambda, H_\lambda) v_0$$

$$= \kappa(\lambda, \lambda) v_0$$

$$\therefore \omega v_0 = \kappa(2\rho, \lambda) v_0 + \kappa(\lambda, \lambda) v_0 = \kappa(\lambda + 2\rho, \lambda) v_0$$

Cálculo explícito en términos de los m's

Para cada α, consideremos el número m_α igual al peso máximo de la $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$-subrepresentación de S generada por v_0:

$$h_\alpha v_0 = \frac{2H_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)} v_0 = m_\alpha v_0$$

Si $m_\alpha = 0, \forall\alpha \Rightarrow E_{-\alpha}|_S = 0 \Rightarrow \mathbb{C}v_0 \cong \mathbb{C}$

Concluímos $S \ncong \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ al menos un $m_\alpha > 0$.

Para el primer sumando, conociendo las acciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (via $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$)

$$\sum_{\alpha\in\Phi^+}(E_\alpha\otimes E_{-\alpha}+E_{-\alpha}\otimes E_\alpha)v_0=\sum_{\alpha\in\Phi^+}E_\alpha E_{-\alpha}v_0$$

$$=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2}\frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}E_\alpha E_{-\alpha}v_0=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2}X_\alpha Y_\alpha v_0$$

$$=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2}X_\alpha v_1^{(\alpha)}=\underbrace{\left(\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2}m_\alpha\right)}_{cte_1}v_0$$

Hay un $m_{\alpha_0}>0$, y como $\kappa(\alpha,\alpha)>0$, estos términos de la suma contribuyen con un número $cte_1\in\mathbb{R}_{>0}$

Para la componente de ω en $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, tomamos $\Delta \subset \Phi$ tal que $\{H_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ sea base de $\mathfrak{h}$ (por ej. simples). Calculamos $\{H^\alpha : \alpha \in \Delta\}$, la base dual c.r.a Killing:

La matriz K con coeficientes $\kappa_{\alpha,\beta} := \kappa(\alpha, \beta)_{\alpha,\beta\in\Delta}$ es definida positiva $\Rightarrow$ su inversa también.
Denotamos $\kappa^{\alpha,\beta} := (K^{-1})_{\alpha,\beta}$.

$$\Rightarrow H^\beta = \sum_\alpha \kappa^{\alpha\beta} H_\alpha$$

pues

$$\kappa(H_\alpha, H^\beta) = \kappa(H_\alpha, \sum_\gamma \kappa^{\beta\gamma} H_\gamma) = \sum_\gamma \kappa^{\beta\gamma} \kappa(H_\alpha, H_\gamma)$$

$$= \sum_\gamma \kappa^{\beta\gamma} \kappa_{\alpha,\gamma} = \delta_\alpha^\beta$$

Ahora actuamos en v_0...

$$\sum_{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} H_\alpha H_\beta v_0$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2} \frac{\kappa(\beta,\beta)}{2} \kappa^{\alpha,\beta} \frac{2H_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)} \frac{2H_\beta}{\kappa(\beta,\beta)} v_0$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\kappa(\alpha,\alpha)}{2} \frac{\kappa(\beta,\beta)}{2} \kappa^{\alpha,\beta} m_\alpha m_\beta v_0$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\left(\sum_{\alpha,\beta} \kappa(\alpha,\alpha) m_\alpha \; \kappa^{\alpha,\beta} \; \kappa(\beta,\beta) m_\beta \right)}_{:=c_{\mathfrak{h}}} v_0$$

Veamos que $c_{\mathfrak{h}} \in \mathbb{R}_{>0}$

algún $m_\alpha \neq 0$. Fijamos una numeración de $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. El vector

$$v_{\kappa,\underline{m}} := \frac{1}{2}\Big(\kappa(\alpha_1,\alpha_1)m_{\alpha_1}, \ldots, \kappa(\alpha_\ell,\alpha_\ell)m_{\alpha_\ell}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(\kappa_{11}m_1, \ldots, \kappa_{\ell\ell}m_\ell) \neq 0 \;\in\; \mathbb{R}^\ell$$

K^{-1} es def. positiva $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\kappa(\alpha,\alpha)m_\alpha\,\kappa^{\alpha,\beta}\,\kappa(\beta,\beta)m_\beta = \frac{1}{4}\sum_{i,j}\kappa_{ii}m_i\,\kappa^{ij}\,\kappa_{jj}m_j$$

$$= \frac{1}{4}\boxed{\quad v_{\kappa,\underline{m}}\quad}\begin{pmatrix} \kappa^{1,1} & \ldots & \kappa^{1,\ell} \\ \vdots & \kappa^{i,j} & \vdots \\ \kappa^{\ell,1} & \ldots & \kappa^{\ell,\ell}\end{pmatrix}\boxed{v^{tr}_{\kappa,\underline{m}}} > 0$$

$$\therefore \quad \omega \cdot v_0 = (cte_1 + c_{\mathfrak{h}})v_0 \qquad cte_1, c_{\mathfrak{h}} \in \mathbb{R}_{>0}$$

Representaciones de peso máximo

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple y fijemos $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ un sistema de raíces simples, y llamemos $h_i := \frac{2}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} H_{\alpha_i}$.

Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, construiremos una rep. $V(\lambda)$ de dimensión infinita generada por un v_0, con un único cociente simple $L(\lambda)$ de peso máximo λ.
Casi siempre $\dim L(\lambda) = \infty$, pero veremos

$$\dim L(\lambda) < \infty \Leftrightarrow \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i = 1, \ldots, \ell)$$

Con este procedimiento, se obtienen *todas* las representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.

Primero repasamos lo que sabemos hasta ahora:

Lema

dim $V < \infty$ *una rep. de* $\mathfrak{g}$*, entonces*

- $V = \oplus_i S_i$ *es suma directa de simples.*
- $h_\alpha := \dfrac{2H_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$ *son simultáneamente diagonalizables , sus autovalores son enteros.*
- $\exists 0 \neq v_0 \in V$ *tal que* $x.v_0 = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *con* $\alpha > 0$.
- $h_\alpha v_0 = m_\alpha v_0$, $m_\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Corolario

dim $V < \infty$ *rep. simple* $\Rightarrow$ *tiene asociada una upla de* ℓ*-enteros* $(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}, \ldots, m_{\alpha_\ell}) \in \mathbb{N}_0^\ell$.

Veremos luego que cualquier upla es posible y que determina completamente a V