GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE
1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 17

Relaciones de Serre y teoremas de reconstrucción

$\mathfrak{g}$ ss compleja, $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan,
Φ sistema de raíces Φ,
Δ elección de raíces simples
$(A_{ij})_{1\leq i,j\leq \ell}$ la matriz de Cartan.
Recordamos $\alpha \in \mathfrak{h}^* \rightsquigarrow \alpha = \kappa(H_\alpha, -)$.
Definimos

$$h_i = \frac{2}{|\alpha_i|^2} H_{\alpha_i}$$

$$e_i = \text{ vector no nulo en } \mathfrak{g}_{\alpha_i}$$

$$f_i = \text{ vector en } \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \text{ tal que } \kappa(e_i, f_i) = \tfrac{2}{|\alpha_i|^2}$$

Proposición

El conjunto $\mathcal{B}_S = \{h_i, e_i, f_i : i = 1, \ldots, \ell\}$ genera $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie.

$$\boxed{A_{ij} = \frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}}$$

Teorema (Relaciones de Serre)

El conjunto $\mathcal{B}_S = \{h_i, e_i, f_i : i = 1, \ldots, \ell\}$ satisface las siguientes relaciones:

(S1) $[h_i, h_j] = 0, \quad \forall i, j$

(S2) $[e_i, f_i] = h_i, \quad [e_i, f_j] = 0, \quad \forall i \neq j$

(S3) $[h_i, e_j] = A_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ij} f_j, \quad \forall i, j$

(S_{ij}^{+}) $(\mathrm{ad}\, e_i)^{-A_{ij}+1}(e_j) = 0, \quad \forall i \neq j$

(S_{ij}^{-}) $(\mathrm{ad}\, f_i)^{-A_{ij}+1}(f_j) = 0, \quad \forall i \neq j$

dem: $[h_i, h_j] = 0$ es claro. También sabemos que si $i \neq j$, $[e_i, f_j] = 0$ pues $\alpha_i - \alpha_j$ no es raíz (porque no es ni positiva ni negativa) y si $i = j$ entonces

$$[e_i, f_i] = \kappa(e_i, f_i)H_{\alpha_i} = \frac{2}{|\alpha_i|^2}H_{\alpha_i} = h_i$$

Para las relaciones entre los h_i y los e_j:

$$[h_i, e_j] = \alpha_j(h_i)e_j = \alpha_j\left(\frac{2}{|\alpha_i|^2}H_{\alpha_i}\right)e_j = \kappa\left(H_{\alpha_j}, \frac{2}{|\alpha_i|^2}H_{\alpha_i}\right)e_j$$

$$= \frac{2}{|\alpha_i|^2}\kappa\left(\alpha_j, \alpha_i\right)e_j = A_{ij}e_j$$

Análogamente $[h_i, f_j] = -\alpha_j(h_i)f_j = -A_{ij}f_j$

Para las relaciones *cuadráticas* usamos las longitudes de las α-cuerdas:

$$e_j, [e_i, e_j], [e_i, [e_i, e_j], [e_i, [e_i, [e_i, e_j]], \ldots$$

$$\underset{\in \mathfrak{g}_{\alpha_j}}{e_j}, \underset{\in \mathfrak{g}_{\alpha_j+\alpha_i}}{\mathrm{ad}_{e_i}(e_j)}, \underset{\in \mathfrak{g}_{\alpha_j+2\alpha_i}}{\mathrm{ad}^2_{e_i}(e_j)}, \underset{\in \mathfrak{g}_{\alpha_j+3\alpha_i}}{\mathrm{ad}^3_{e_i}(e_j)} \quad , \ldots$$

Si $\alpha_j + q\alpha_i$ es raíz pero $\alpha_j + (q+1)\alpha_i$ no es raíz, entonces $\mathrm{ad}^q_{e_i}(e_j) \neq 0$ y $\mathrm{ad}^{q+1}_{e_i}(e_j) = 0$. Notar $\alpha_j - \alpha_i$ no es raíz. Ponemos $p = 0$ y q como habíamos mostrado(mucho) antes,

$$p - q = -q = 2\frac{\kappa(\alpha_j, \alpha_i)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} = A_{ij} \Rightarrow \mathrm{ad}_{e_i}^{-A_{ij}+1}(e_j) = 0$$

La relación con los f_i es completamente análoga.

Ejemplo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\begin{array}{lll}
(S1) & [h_i, h_j] = 0, & \forall i, j \\
(S2) & [e_i, f_i] = h_i, \qquad [e_i, f_j] = 0, & \forall i \neq j \\
(S3) & [h_i, e_j] = A_{ij} e_j, \qquad [h_i, f_j] = -A_{ij} f_j, & \forall i, j \\
(S_{ij}^+) & (\mathrm{ad}\, e_i)^{1-A_{ij}}(e_j) = 0, & \forall i \neq j \\
(S_{ij}^-) & (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-A_{ij}}(f_j) = 0, & \forall i \neq j
\end{array}$$

Para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $A = (2)$, hay una única raíz simple, $\mathcal{B}_S = \{h, e, f\}$ satisface

$$\begin{array}{ll}
(S1) & [h, h] = 0 \\
(S2) & [e, f] = h \\
(S3) & [h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f.
\end{array}$$

Ejemplo $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

(S1) $[h_i, h_j] = 0, \qquad \forall i,j$

(S2) $[e_i, f_i] = h_i, \qquad [e_i, f_j] = 0, \qquad \forall i \neq j$

(S3) $[h_i, e_j] = A_{ij} e_j, \qquad [h_i, f_j] = -A_{ij} f_j, \qquad \forall i,j$

(S_{ij}^+) $(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-A_{ij}}(e_j) = 0, \qquad \forall i \neq j$

(S_{ij}^-) $(\mathrm{ad}\, f_i)^{1-A_{ij}}(f_j) = 0, \qquad \forall i \neq j$

Para $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_S = \{h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2\}$ satisface S1,S2, $i = 1,2$:

(S3) $[h_i, e_i] = 2e_i, \qquad [h_i, e_j] = -e_j$ si $i \neq j$, idem $[h_i, f_j]$

(S_{ij}^+) $(\mathrm{ad}\, e_i)^{-(-1)+1}(e_j) = 0\ \forall i \neq j$ dice:

$$[e_1, [e_1, e_2]] = 0 = [e_2, [e_2, e_1]]$$

(S_{ij}^-) $[f_1, [f_1, f_2]] = 0 = [f_2, [f_2, f_1]]$

Ejemplo $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

Tenemos los generadores (como espacio vectorial)

$$h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2$$
$$[e_1, e_2],\ [f_1, f_2]$$

es el álgebra asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Todos los corchetes se deducen de las relaciones de Serre (y de ser de Lie). Por ejemplo

$$[e_1, [e_1, e_2]] = 0$$
$$[e_2, [e_1, e_2]] = -[e_2, [e_2, e_1]] = 0$$
$$[h_1, [e_1, e_2]] = [[h_1, e_1], e_2] + [e_1, [h_1, e_2]]$$
$$= [2e_1, e_2] + [e_1, -e_2] = [e_1, e_2]$$
$$[f_1, [e_1, e_2]] = [[f_1, e_1], e_2] + [e_1, [f_1, e_2]] = [h_1, e_2] + [e_1, 0] = -e_2$$

Ejercicio: Reconstruir $\mathfrak{g}$ en los casos

$$B_2: \qquad O = O \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -1: \qquad \mathrm{ad}_{e_1}^{1+1}(e_2) = [e_1, [e_1, e_2]] = 0$$

$$A_{21} = -2: \qquad \mathrm{ad}_{e_2}^{2+1}(e_1) = [e_2, [e_2, [e_2, e_1]]] = 0$$

$$G_2: \qquad O \equiv O \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Base de Chevalley.

Los elementos e_i, f_i, h_i con $1 \leq i \leq \ell$ no son base de $\mathfrak{g}$.
Pero [Chevalley] $\exists$ una base de $\mathfrak{g}$ de la forma

$$\{x_\alpha : \alpha \in \Phi; h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$$

con $h_i := h_{\alpha_i}$ para algún sistema de raíces simples $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ de Φ, tal que satisface

- $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, $\forall \alpha \in \Phi^+$,
- Si $\alpha, \beta \in \Phi$ l.i y $\beta - p\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ es la α-cuerda $\Rightarrow$

$$[x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} \pm(p+1)x_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi, \\ 0 & \text{si } \alpha+\beta \notin \Phi \end{cases}$$

- $[h_{\alpha_i}, x_\alpha] = 2\frac{\kappa(\alpha,\alpha_i)}{\kappa(\alpha_i,\alpha_i)}x_\alpha$

Notar todas las ctes de estructura $\in \mathbb{Z}$.

(sin dem)

Proposición

Sea A una matriz de Cartan abstracta, entonces el álgebra de Lie libre con generadores el conjunto $\mathcal{B}_S = \{h_1, \ldots, h_\ell, e_i, \ldots, e_\ell, f_1, \ldots, f_\ell\}$ *y sujeta a las relaciones de Serre es un álgebra de Lie semisimple.*

$\mathfrak{h} := \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{C}h_i$ *es una subálg. de Cartan.*

$\forall i = 1, \ldots, \ell$, $\mathbb{C}e_i$ *es subespacio raíz. La subálg. de Le generada por los* e_i *proporciona una elección de* Φ^+ *y los* $\mathbb{C}e_i$ *corresponden a las raíces simples.*

$A(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta)$*=La matriz de Cartan asociada a* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta$ *coincide con la matriz de Cartan abstracta original.*

Corolario

Dos álgebras de Lie semisimples con misma matriz de Cartan son isomorfas.

Teoremas de isomorfismo

$\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ ss complejas, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ subálgebras de Cartan, Φ y Φ' los sistemas de raíces correspondientes. Se prueba que un isomorfismo entre Φ y Φ' induce un isomorfimo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ que hace corresponder $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}'$.

Esto dice	que	la aplicación:
{clases de isom. de álg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$}	$\rightsquigarrow$	{clases de isom. de sist. de raíces abstractos}
	es	inyectiva

un iso $\pi : (E, \Phi) \to (E'\Phi') \rightsquigarrow \mathfrak{h}_0^* \cong \mathfrak{h'}_0^*$ (isometría)
Complexificando, $\pi : \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}'^*$.
Vía Killing $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$:

$$\alpha \in \mathfrak{h}^* \rightsquigarrow \exists! H_\alpha \in \mathfrak{h} : \alpha = \kappa(H_\alpha, -)$$

El isomorfismo entre Φ y Φ' viene de una isometría, y $h_\alpha = 2\frac{H_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)} \Rightarrow \pi(h_\alpha) = h_{\pi(\alpha)}$ i.e. $h_\alpha \mapsto h'_{\alpha'}$

$\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ abelianas $\Rightarrow \pi$ es un iso de álgebras de Lie.
Sea $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ una elección abritraria, para cada $\alpha \in \Delta$, idem $0 \neq x'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$ para cada $\alpha' \in \Delta'$.
Dada esta elección, afirmamos que $\exists!$ isomorfismo de álgebras de Lie $x_\alpha \mapsto x'_{\pi(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Delta$.
La unicidad es clara, pues $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ determina la elección de $x_{-\alpha}$, $x'_{-\pi(\alpha)}$), y $\pi(x_{-\alpha})$, y todos forman un sist. de generadores.

Para la existencia, enunciamos:

Teorema de reconstrucción de Serre

Teorema (Serre)

Φ *un sistema de raíces* abstracto*,*
$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ *una elección de raíces simples.*

$\mathfrak{g}$ *el álgebra de Lie libre generada por los* 3ℓ *elementos* $\{x_i, y_i, h_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ *sujetos a las relaciones (S1), (S2), (S3),* (S_{ij}^+) *y* (S_{ij}^-)*.*

Entonces $\dim \mathfrak{g} < \infty$*, es semisimple, el subespacio vectorial generado por los* h_i *es una subálgebra de Cartan, y su correspondiente sistema de raíces es* Φ*.*

El teorema de Serre dice que la aplicación:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \{\text{clases de isom. de} & \to & \{\text{ clases de isom. de sist.} \\ \text{álg. de Lie s.s. }/\mathbb{C}\} & & \text{de raíces abstractos}\} \end{array}}$$

es suryectiva

Ejercicios:
$\mathfrak{so}(2\times 2+1,\mathbb{C})=\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})\cong\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$
$\mathfrak{so}(2\times 3,\mathbb{C})=\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$
Procedimiento:

- encontrar $\mathfrak{h}$ en cada caso (e.g. $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$)
- Encontrar los $\mathfrak{g}_\alpha$ y determinar los Φ's.
- Encontrar isometría entre los sistems de raíces.
- Elegir $\Delta_1\subset\Phi_1$ y tomar $\Delta_2\subset\Phi_2$ a través de la isometría.
- Elegir $0\neq x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ cada subespacio raíz simple.
- Definir el morfismo en los $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ usando la correspondenica entre los Φ's y determinar en $x_\alpha:\alpha\in\Phi^+$ a través de los corchetes de Lie.
- Explicitar $x_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ como el único que verifica $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$ y terminar de definir el morfismo.

Existencia de la forma real compacta

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y consideremos un sistema de generadores de Chevalley - Serre $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Se denota $i := \sqrt{-1}$. Se define la forma real $\mathfrak{u}$ como el álgebra de Lie real generada por

$$\{ih_\alpha, (e_\alpha - f_\alpha), i(e_\alpha + f_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$$

Hecho: Killing de $\mathfrak{u}$ es definida negativa.
Por ej.

$$\kappa(ih_\alpha, e_\beta - f_\beta) = 0 = \kappa(ih_\alpha, i(e_\beta + f_\beta)) = \kappa(e_\alpha - f_\beta, i(e_\beta + f_\beta))$$

$$\kappa(ih_\alpha, ih_\beta) = i^2\kappa(h_\alpha, h_\beta)$$

$$\kappa(e_\alpha - f_\alpha, e_\beta - f_\beta) = -2\delta_{\alpha,\beta}\kappa(e_\alpha, f_\beta)$$

$$\kappa(i(e_\alpha + f_\alpha), i(e_\beta + f_\beta)) = +2i^2\delta_{\alpha,\beta}\kappa(e_\alpha, f_\beta)$$

luego $\mathfrak{u}$ es un álgebra de Lie compacta, pues $\mathfrak{u}$ es subálgebra de $\mathfrak{so}(\kappa_{\mathfrak{u}}) \cong \mathfrak{so}(\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}, \mathbb{R})$.

Formas reales compactas de álgebras de Lie clásicas

tipo	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{u}$
A_n	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(n+1)$
B_n	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{R})$
C_n	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n)=\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})\cap\mathfrak{u}(2n)$
D_n	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{R})$

Representaciones

Corolario

$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$, *entonces*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ *como espacio vectorial,* $\mathfrak{n}^+$*,* $\mathfrak{n}^-$ *y* $\mathfrak{h}$ *son subálgebras de Lie, también* $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus$ *y* $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$ *son subálgebras de Lie, con* $\mathfrak{n}^+$ *y* $\mathfrak{n}^-$ *ideales respectivos.*
2. *Los subespacios* $\mathfrak{n}^+$ *y* $\mathfrak{n}^-$ *son subálgebras de Lie nilpotentes y actúan* ad*-nilpotentemente en* $\mathfrak{g}$*.*
3. *Los subespacios* $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$ *y* $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$ *son subálgebras de Lie solubles.*
4. *Si* V *es rep. de* $\mathfrak{g}$ *de dimensión finita* $\Rightarrow \exists 0 \neq v_0 \in V$ *tal que* $E_\alpha . v_0 = 0 \ \forall \ \alpha \in \Phi^+$*.*

Las pruebas de 1, 2 y 3 son claras. Veamos 4:

dim $V < \infty$ un $\mathfrak{g}$-módulo $\Rightarrow$ es una representación de $\mathfrak{n}^+$.
Dado E_α, con $\alpha \in \Phi^+ \rightsquigarrow \mathfrak{sl}_\alpha = \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathbb{C}E_{-\alpha}$.

dim $V < \infty \Rightarrow V = \oplus_i S_i$ con S_i rep. $\mathfrak{sl}_\alpha$-simples.
E_α es nilpo en $S_i \forall i \Rightarrow E_\alpha$ es nilpo en V.

$\mathfrak{n}^+ \curvearrowright V$, su imagen en $\mathrm{End}(V)$ es una subálgebra de Lie soluble $\Rightarrow$ isomorfa a una subálgebra de matrices triangulares superiores.
Pero tiene un sistema de generadores nilpotentes, (los E_α actuando en V), luego, en la diagonal, tienen que tener ceros $\Rightarrow$ combinaciones lineales de triangulares estrictas da triangulares estrictas.
$\therefore$ la imagen de $\mathfrak{n}^+$ en la representación consiste de endomorfismos nilpotentes. [Engel] $\Rightarrow \exists\, 0 \neq v_0 \in V$ con $E_\alpha v_0 = 0$ para todo $\alpha \in \Phi^+$.