

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 16

Matrices de Cartan y diagramas de Dynkin

Matrices de Cartan:

$$A_{ij} = \frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}$$

- 1 $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo ij .
- 2 $A_{ii} = 2$, *i.e.* los coeficientes de la diagonal son todos iguales a 2 pues $A_{ii} = 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)} = 2$.
- 3 $A_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.
- 4 $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$
- 5 Existe una matriz diagonal D tal que $D_{ii} > 0$ y DAD^{-1} es simétrica definida positiva, en particular A es no singular.

En el caso de sist. de raíces, $D_{ii} = \|\alpha_i\|^2 = \kappa(\alpha_i, \alpha_i)$ y $(DAD^{-1})_{ij} = 2\kappa(\alpha_i, \alpha_j) = (2 \text{ veces})$ la matriz del producto interno en E .

Proposición

La matriz de Cartan determina $\Phi \subset E$ a menos de isomorfismo.

Proposición

Sean (E, Φ) y (E', Φ') dos espacios euclídeos con sistemas de raíces Φ y Φ' , respectivamente. Si Δ es un sistema de raíces simples de Φ , Δ' es un sistema de raíces simples de Φ' y existe una función biyectiva $\tau : \Delta \rightarrow \Delta'$ que verifica

$$\frac{2\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{2\kappa(\tau\alpha_j, \tau\alpha_j)}{\kappa(\tau\alpha_j, \tau\alpha_j)}$$

entonces τ se extiende a un isomorfismo entre E y E' induciendo un isomorfismo entre Φ y Φ' .

Diagrama de Dynkin

Sea A una matriz de Cartan. Si viene de raíces, entonces



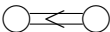
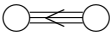
$$A_{ij} = \frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)} \in \mathbb{Z}$$

En abstracto, sabemos que si $i \neq j \Rightarrow A_{ij} \leq 0$, luego $A_{ij}A_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Definimos el **diagrama de Dynkin** de Δ como el grafo múltiple con tantos vértices como elementos de Δ y tantas aristas uniendo α_i con α_j como el número natural $A_{ij}A_{ji}$.

(En caso de haber más de una arista entre dos vértices, se coloca un signo de desigualdad señalando la raíz de mayor longitud.)

Ejemplos:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$A_1 \times A_1$	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	A_2	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	B_2	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	G_2	

Ejemplo: $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$

Los subespacios de raíces simples son $\mathbb{C}E_{i,j+1} = \mathfrak{g}_{\alpha_i}$
 $i = 1, \dots, n$. Si $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$,

$$H \cdot_{\text{ad}} E_{i,j+1} = \text{ad}_H(E_{i,j+1}) = [H, E_{i,j+1}] = (a_i - a_{i+1})E_{i,j+1}$$

$$\Rightarrow \alpha_i(H) = a_i - a_{i+1} = \text{tr}(H_i \cdot H)$$

$$\text{donde } H_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} = \text{diag}(0, \dots, 0, \overbrace{1, -1}^{i,j+1}, 0, \dots, 0)$$

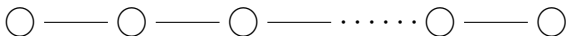
$$\therefore H_{\alpha_i} = \text{cte} H_i, \quad \kappa(\alpha_i, \alpha_j) = \text{cte}' \kappa(H_i, H_j) = \text{cte}'' \text{tr}(H_i H_j)$$

$$A_{ij} = \frac{2\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{2\text{tr}(H_i H_j)}{\text{tr}(H_j H_j)} = \text{tr}(H_i H_j) = \begin{cases} 2 & j = i \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

La matriz de Cartan para $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

y su diagrama de Dynkin es

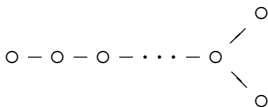



Teorema: Si Φ es un sistema de raíces irreducibles de rango l , entonces su diagrama de Dynkin correspondiente es alguno de los siguientes:

$$A_l, l \geq 1 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \circ$$

$$B_l, l \geq 2 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ \rightrightarrows \circ$$

$$C_l, l \geq 3 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ \leftrightsquigarrow \circ$$

$$D_l, l \geq 4$$


$$E_{6,7,8}$$


$$F_4 \quad \circ - \circ = \circ - \circ$$

$$G_2 \quad \circ \equiv \circ$$

Para cada diagrama de Dynkin (o matriz de Cartan)

$$A_\ell \leftrightarrow \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C}),$$

$$B_\ell \leftrightarrow \mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C}),$$

$$C_\ell \leftrightarrow \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}),$$

$$D_\ell \leftrightarrow \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C}),$$

$E_{6,7,8}$, F_4 , G_2 de la lista anterior,

existe un sistema irreducible de raíces Φ de rango ℓ tal que su diagrama de Dynkin es el dado.

Para los excepcionales: E_6 , E_7 , E_8 , F_4 y G_2 , se construyen sistemas de raíces, y más tarde, como consecuencia del teorema de Serre, se obtiene un álgebra de Lie abstracta correspondiente a cada tipo.

La clasificación de las álgebras de Lie semisimples se obtiene de la de los Dynkin

Teorema

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja, sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} y Φ el sistema de raíces correspondiente. Si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{g}_i$ es su descomposición en subálgebras de Lie simples, entonces $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ es una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_i ; el correspondiente sistema de raíces Φ_i se incluye canónicamente en Φ de manera tal que $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t$ es la descomposición de Φ en componentes irreducibles.

El teorema reduce el problema de clasificación a las simples.

Teorema

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja, sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} y Φ el sistema de raíces correspondiente; Fijemos una base Δ de Φ entonces \mathfrak{g} está generada como álgebra de Lie por

$$\{0 \neq x_\alpha, 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$$

Un conjunto $\{0 \neq x_\alpha, 0 \neq x_{-\alpha} : x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$ es un *conjunto standard de generadores de \mathfrak{g}*

si $h_\alpha := [x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$ satisface $\alpha(h_\alpha) = 2$; h_α queda unívocamente determinado a partir de α .

Clasificación de las matrices de Cartan

a través de los diagramas de Dynkin

Sea A de Cartan abstracta de tamaño dos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

$\exists D : DAD^{-1}$ es > 0 . En particular $\det(A) > 0$,

$$\Rightarrow 4 - ab > 0$$

$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow ab = 0, 1, 2, 3$, por lo tanto las posibles matrices de Cartan 2 por 2 (a menos de transponer) son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

que corresponden a $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 y G_2 respectivamente.

Afirmación

A de Cartan de tamaño ℓ , $1 \leq i \leq \ell$

$\rightsquigarrow \tilde{A}$ de tamaño $\ell - 1$ a partir de A borrando la fila y columna i . Entonces \tilde{A} también es de Cartan.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & \cdots & * & \cdots & * \\ * & \ddots & \vdots & & * \\ \hline * & \cdots & 2 & \cdots & * \\ \hline * & & \vdots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & \cdots & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & * \\ \hline * & & \ddots & * \\ * & \cdots & \cdots & 2 \end{array} \right)$$

integralidad \checkmark $\tilde{A}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}_{ji} = 0$ \checkmark

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell) : DAD^{-1}$ es simétrica y definida

positiva, $\Rightarrow \tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, \hat{d}_i, \dots, d_\ell)$ funciona para \tilde{A} .

Corolario

A de Cartan abstracta $\Rightarrow A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2, 3 \forall i \neq j$.

dem:

Eliminar filas y columnas hasta lograr una matriz de 2×2

Proposición

Los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan abstractas satisfacen

- a) *La cantidad de pares de vértices unidos por alguna arista es menor estricta que ℓ . ($\ell = \#$ vértices.)*
- b) *No contienen lazos.*
- c) *A lo sumo 3 aristas llegan a cada vértice.*

Sabiendo *a)*, si el diagrama tuviera un lazo, podríamos eliminar todos los vértices que no estuvieran en el lazo y entonces tendríamos un diagrama circular que provendría de una matriz de Cartan, digamos de r vértices, que tendría por lo menos r aristas \rightarrow contradicción.

Para demostrar *a)* introduciremos vectores en \mathbb{R}^ℓ que nos mostrarán cómo recomponer un sistema de raíces a partir de una matriz de Cartan.

Sea A de Cartan $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i > 0$, tal que DAD^{-1} es simétrica y definida positiva.

Definimos Q vía

$$DAD^{-1} = 2Q$$

$Q = Q^t$ y $Q > 0 \Rightarrow \exists Q^{1/2} > 0$.

Sean $\phi_i \in \mathbb{R}^\ell$ los vectores columna de $Q^{1/2}$, es decir, $\phi_i = Q^{1/2}e_i$ para $1 \leq i \leq \ell$, entonces

$$\kappa(\phi_i, \phi_j) = \kappa(Q^{1/2}e_i, Q^{1/2}e_j) = \kappa(Qe_i, e_j) = Q_{ij}$$

Notar $\kappa(\phi_i, \phi_i) = 1$. $\alpha_i := d_i \phi_i \Rightarrow \|\alpha_i\| = d_i$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ es l.i. y

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2(D^{-1}QD)_{ij} = 2d_i^{-1}Q_{ij}d_j = 2d_i^{-1}d_j\kappa(\phi_i, \phi_j) \\ &= 2d_i^{-1}d_j\kappa\left(\frac{\alpha_i}{d_i}, \frac{\alpha_j}{d_j}\right) = 2\frac{1}{d_i^2}\kappa(\alpha_i, \alpha_j) = 2\frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|^2} \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$A_{ij} \cdot A_{ji} = 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|^2} 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} = 4 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)^2}{|\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2}$$

Recordando $\kappa(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ para todo $i \neq j$, obtenemos

$$\sqrt{A_{ij} \cdot A_{ji}} = -2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|}$$

Para concluir la prueba del item a)...

usamos el vector

$$\phi := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|} = \sum_{i=1}^{\ell} \phi_i \Rightarrow$$

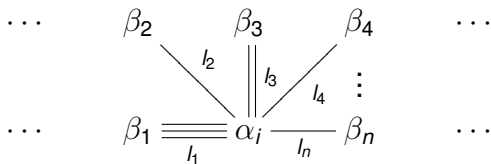
$$\begin{aligned} 0 < \|\phi\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_i\|} + 2 \sum_{i < j} \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} \\ &= \ell + \sum_{i < j} 2 \frac{\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} = \ell - \sum_{i < j} \sqrt{A_{ij} A_{ji}} \end{aligned}$$

$A_{ij} A_{ji} = 0, 1, 2, 3$ y $A_{ij} A_{ji} = 0$ si no están conectados.

$\sqrt{A_{ij} A_{ji}} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, en todo caso $\sqrt{A_{ij} A_{ji}} \leq 1$

$$0 < \ell - \sum_{i < j} \sqrt{A_{ij} A_{ji}} \leq \ell - \#\{\text{pares } i < j \text{ conectados}\}$$

dem de c), consideremos un vértice i , le asignamos el vector α_i ; β_1, \dots, β_n los elementos correspondientes a los conectados a i a través de l_r vértices cada uno.



el diagrama no tiene lazos $\Rightarrow (\beta_j, \beta_r) = 0$
 $\therefore \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es un conjunto ortogonal .

renombrando $\alpha := \alpha_i$, el conjunto $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha\}$ es linealmente independiente.

$$U := \langle \{\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha\} \rangle$$

y $\delta \in \{\beta_1, \dots, \beta_n\}^\perp \cap U$ con $\|\delta\| = 1$.

Necesariamente $(\alpha, \delta) \neq 0$.

Como $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \delta\}$ es un sistema ortogonal,

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{r=1}^n \kappa \left(\alpha, \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|} \right)^2 + \kappa(\alpha, \delta)^2 > \sum_{r=1}^n \kappa \left(\alpha, \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|} \right)^2$$

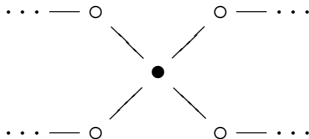
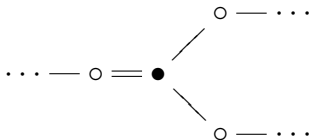
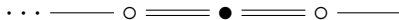
$$\Rightarrow 1 > \sum_{r=1}^n \frac{1}{\|\alpha\|^2} \kappa \left(\alpha, \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n 2 \frac{\kappa(\alpha, \beta_r)}{\|\alpha\|^2} \cdot 2 \frac{\kappa(\beta_r, \alpha)}{\|\beta_r\|^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n I_r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^n I_r < 4$$

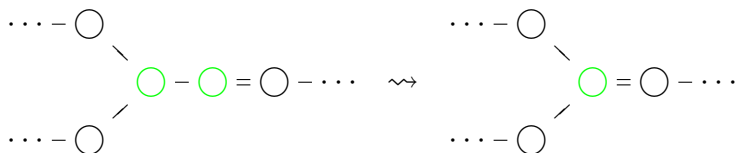
Ejemplos prohibidos



Operación: Colapso de arista simple

(*) dos vértices unidos por exactamente una arista
 \rightsquigarrow contraemos la arista e identificamos los vértices.

Ejemplos:



Proposición

La operación en matrices de Cartan correspondiente a la operación anterior () en los diagramas de Dynkin preserva la propiedad de ser de Cartan.*

dem: condiciones de integralidad ✓.

Spongamos que los dos vértices que están unidos por una única arista son exactamente los dos (numerados) últimos. \Rightarrow la matriz de Cartan inicial A_ℓ es de la forma:

$$A_\ell = \left(\begin{array}{c|cc} A_{\ell-2} & \vdots & \vdots \\ \hline \dots & 2 & -1 \\ \hline \dots & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Cuando contraemos la arista e identificamos los dos vértices, la matriz que queda es del tipo

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{\ell-2} & \vdots \\ \hline \cdots & 2 \end{array} \right)$$

donde el bloque de tamaño $\ell - 2$ no se alteró, porque no se agregan ni se quitan aristas entre los demás vértices y, si había un vértice unido al último, o al anteúltimo, entonces queda la misma arista unida al vértice nuevo, por lo tanto, lo que tenemos en **la columna y fila punteada** no es otra cosa que la **suma de las dos columnas** (respectivamente, filas) punteadas originales.

Si denotamos por E a la matriz

$$E = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(\ell-1) \times \ell}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = EAE^t$$

Si antes teníamos una matriz diagonal

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell)$ tal que DAD^{-1} era simétrica y definida positiva, dado que el vértice $\ell - 1$ y el vértice ℓ estaban unidos por una única arista, tenemos que $d_{\ell-1} = d_\ell = d$ (ver ejercicio 4 pag. 109), es decir, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{\ell-2}, d, d)$.

Tomemos ahora la matriz diagonal

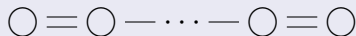
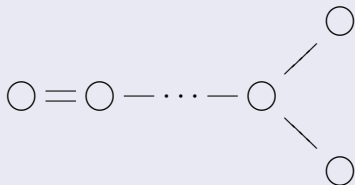
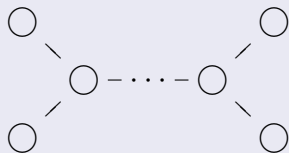
$\tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_{\ell-2}, d)$. Ejercicio:

$$\tilde{D}\tilde{A}\tilde{D}^{-1} = EDAD^{-1}E^t$$

y por lo tanto, es definida positiva (ejercicio!).

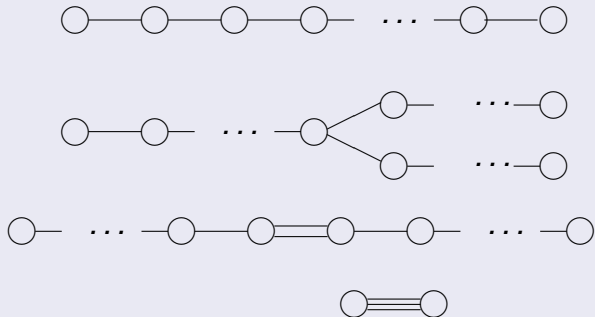
Corolario

Los diagramas de Dynkin asociados a matrices de Cartan no contienen subgrafos de la forma



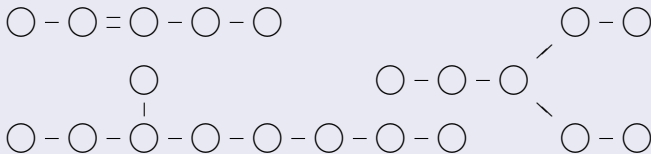
Corolario

Las posibilidades obtenidas hasta ahora para los diagramas de Dynkin conexos que provienen de matrices de Cartan son:



Proposición

Los diagramas



no corresponden a matrices de Cartan.

dem: los determinantes de las matrices son $= 0$

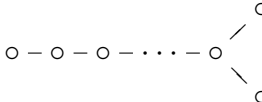
Corolario

Los diagramas de Dynkin conexos que provienen de matrices de Cartan sólo pueden ser:

$$A_\ell, \ell \geq 1 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \circ$$

$$B_\ell, \ell \geq 2 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ$$

$$C_\ell, \ell \geq 3 \quad \circ - \circ - \circ - \dots - \circ \Leftarrow \circ$$

$$D_\ell, \ell \geq 4$$


$$E_{6,7,8}$$



$$F_4 \quad \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$$

$$G_2 \quad \circ \Rightarrow \circ$$

Lema

$$\det A_\ell = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \ell + 1$$

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$\begin{aligned} |A_\ell| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2|A_{\ell-1}| + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2|A_{\ell-1}| - |A_{\ell-2}| = 2 \times \ell - (\ell - 1) = \ell + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo de cálculo

$$F_5 : \circ - \circ = \circ - \circ - \circ \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos por la 1era columna

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la 1era fila

$$\begin{aligned} &= 2 \left(2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right) - 4 \\ &= 2(2 \det A_3 + 2(-1) \det A_2) - 4 \\ &= 2(2 \times 4 - 2 \times 3) - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$