Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 15

Sistemas de raíces abstractos.

Sea E un espacio Euclídeo, i.e. con producto interno, llamémoslo κ. Para cada $0 \neq \alpha \in E$

$$\rightsquigarrow s_\alpha\text{=la reflexión con respecto al vector } \alpha$$

$$\psi \mapsto s_\alpha(\psi) = \psi - \frac{2\kappa(\alpha, \psi)}{||\alpha||^2}\alpha$$

En efecto,

$$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$$

$$\psi \in \alpha^\perp \Rightarrow s_\alpha(\psi) = \psi$$

Si $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ es el sistema de raíces de una ss $\mathfrak{g}$:

Proposición

$\forall \alpha \in \Phi$, la reflexión s_α con respecto a α preserva Φ.

Al grupo generado por estas reflexiones se lo llama **grupo de Weyl**

Axiomática de Sistemas de raíces

Un subconjunto Φ de un espacio euclídeo E con p.i. κ, se llama un **sistema de raíces** en E si:

(RI) $|\Phi| < \infty$, $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = E$, $0 \notin \Phi$

(R2) $\alpha \in \Phi \Rightarrow$ los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$

(R3) $\alpha \in \Phi \Rightarrow s_\alpha(\Phi) = \Phi$

(R4) $\alpha, \beta \in \Phi \Rightarrow \dfrac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$

Lema

Los posibles valores de $\dfrac{2\kappa(\alpha,\beta)}{\kappa(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ *son, a lo sumo,* $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

dem: Por C-S,

$$|\kappa(\alpha, \beta)| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

o bien

$$\kappa(\alpha, \beta)\kappa(\alpha, \beta) \leq \kappa(\alpha, \alpha)\kappa(\beta, \beta)$$

o bien

$$\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\beta, \beta)} \cdot \frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \leq 4$$

Como son números enteros, tenemos los posibles valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. Pero la igualdad vale sólo en el caso l.d. Y si $\beta = \pm\alpha$ claramente tenemos

$$\frac{2\kappa(\alpha, \pm\alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)} = \pm 2$$

por lo tanto, sólo ocurren $0 \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Obs:

Si $\beta \neq \pm\alpha$ y $|\alpha| \geq |\beta|$ entonces $\dfrac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = 0, \pm 1$.

Lema

Sea Φ un sistema de raíces en un espacio euclídeo E, sean $\alpha, \beta \in \Phi$ entonces

1. *Si $\kappa(\alpha,\beta) > 0$ entonces $\alpha - \beta \in \Phi$. Si $\kappa(\alpha,\beta) < 0$ entonces $\alpha + \beta \in \Phi$.*
2. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ pero $\alpha \pm \beta \notin \Phi$ entonces $\kappa(\alpha,\beta) = 0$.*
3. *La α-cuerda que contiene a β tiene a lo sumo 4 elementos. Más ún, consiste de $\{\beta + m\alpha : -p \leq m \leq q\} \subset \Phi$ con $p, q \geq 0$ y $p - q = \dfrac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}$.*

1. Supondremos $\alpha \neq \pm\beta$ y $|\alpha| \leq |\beta|$. La hipótesis $\kappa(\alpha, \beta) > 0$ + la Obs $\Rightarrow \dfrac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\beta, \beta)} = 1$,

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \alpha - \left(\frac{2\kappa(\alpha, \beta)}{|\beta|^2}\right)\beta = s_\beta(\alpha) \in \Phi$$

El caso $|\alpha| \leq |\beta|$ se obtiene con $s_\alpha(\beta)$. El caso $\kappa(\alpha, \beta) < 0$ se obtiene cambiando β por $-\beta$.

2. es consecuencia de 1.

3. Sean $-p$ y q, respectivamente, el mínimo y el máximo n tal que $\beta + n\alpha \in \Phi \cup \{0\}$. Veamos que la α-cuerda que pasa por β no tiene huecos. (supondremos $\alpha \neq \pm\beta$).
Si hubiera huecos, habría $s \leq r$

$$\cdots, \overbrace{\beta + (s-1)\alpha}^{\in\Phi}, \overbrace{\beta + s\alpha, \cdots, \beta + r\alpha}^{\notin\Phi}, \overbrace{\beta + (r+1)\alpha}^{\in\Phi}, \cdots$$

$\beta + r\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ pero

$$\beta + r\alpha = (\beta + (r+1)\alpha) - \alpha$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}\Big(\kappa(\beta + (r+1)\alpha, \alpha)\Big) = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} + r + 1$$

y $\beta + s\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ pero

$$\beta + s\alpha = (\beta + (s-1)\alpha) + \alpha$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}\Big(\kappa(\beta + (s-1)\alpha, \alpha)\Big) = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} + s - 1$$

$\Rightarrow s - 1 = r + 1$, absurdo!

Para la longitud de una cuerda,
cambiando β por $\widetilde{\beta} - p\alpha$ podemos suponer $-p = 0$.

Luego,

$$p + q = 0 + q = q = \ell - 1 = \frac{2\kappa(\widetilde{\beta}, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)}$$

que es a lo sumo 3, por lo tanto ℓ es a lo sumo 4.

Raíces simples

Ejemplo $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$. Raíces "positivas".

$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{12}, \ \mathfrak{g}_\beta = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{23}$$

$$\mathfrak{g}_\gamma = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{34}$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{13}, \ \mathfrak{g}_{\beta+\gamma} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{24}$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}E_{14}$$

$$\Phi_+ = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma\}$$

$$\Phi = \Phi_+ \coprod \Phi_- = \Phi_+ \coprod (-\Phi_+)$$

$$\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

Raíces simples

$\Delta \subset \Phi \subset E$ se dice un **sistema de raíces simples** , si

1. Δ es una base de E como espacio vectorial
2. Cada raíz $\beta \in \Phi$ se escribe como $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ con los coeficientes c_α enteros, todos ≥ 0 ó todos ≤ 0.

Notar la escritura $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ es única pues Δ es base.
$|\Delta| = \ell = \dim E$;

En el caso de $E = \mathfrak{h}_0^*$ y Φ el sistema de raíces asociado, $|\Delta| = \mathrm{rank}\ \mathfrak{g}$.

Teorema

Todo sistema de raíces Φ admite un sistema de raíces simples.

Proposición

Sea E un espacio euclídeo con sistema de raíces Φ y $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ un sistema de raíces simples, entonces $\mathcal{W}(\Delta)$ está generado por las reflexiones s_{α_i} con $\alpha_i \in \Delta$. Además, si $\beta \in \Phi$ existen $\alpha_j \in \Delta$ y $w \in \mathcal{W}(\Delta)$ tales que $\beta = w(\alpha_j)$.

(dem: de la prop.: Knapp prop 2.62)

demostraremos el teo.

Antes de la dem, un lema:

Lema

Si Δ es un sistema de raíces simples, $\alpha, \beta \in \Delta$, entonces $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$ y $\alpha - \beta$ no es raíz.

Demostración.

si fuera $\kappa(\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \Phi$ y tendríamos una raíz que se escribe como combinación lineal con coeficientes que son enteros, pero de signos diferentes. $\square$

Construccón:
Sea E un espacio euclídeo que contiene al sistema de raíces Φ. Para $\gamma \in E$ definimos

$$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : \kappa(\alpha, \gamma) > 0\}$$

es decir, $\Phi^+(\gamma)$ consiste de aquellas raíces que quedan del "lado positivo" *i.e.* del mismo lado que γ, con respecto al hiperplano ortogonal a γ.
Una unión finita de hiperplanos no puede cubrir a todo E

$$\Rightarrow E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp) \neq \emptyset$$

Tomemos $\gamma \in E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^{\perp})$, entonces es claro que si α es raíz, entonces $\kappa(\gamma, \alpha) > 0$ ó bien $\kappa(\gamma, \alpha) < 0$, en el segundo caso tendremos $\kappa(\gamma, -\alpha) > 0$, es decir:

$$\Phi = \Phi^{+}(\gamma) \coprod -\Phi^{+}(\gamma)$$

Llaamos $\Phi^{+}(\gamma)$= las **raíces positivas** y $\Phi^{-}(\gamma) := -\Phi^{+}(\gamma)$= las **raíces negativas**.

decimos que $\alpha \in \Phi^{+}$ es **descomponible** si existen

$$\beta_1, \beta_2 \in \Phi^{+} : \alpha = \beta_1 + \beta_2$$

en caso contrario, diremos que α es **indescomponible**.

Proposición

Sea $\gamma \in E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^{\perp})$*, entonces el conjunto* $\Delta(\gamma)$ *de raíces positivas indescomponibles es un sistema de raíces simples y todo sistema de raíces simples es de esta forma.*

En cuatro pasos: 1. Cada raíz positiva es comb. lineal entera no negativa de raíces simples.
Fijamos $\gamma \in E \setminus (\bigcup_{\alpha\in\Phi} \alpha^{\perp})$ y consideremos todos los valores $\kappa(\gamma, \alpha)$ donde α es una raíz positiva que no se pueda escribir como combinación entera no negativa de raíces indescomponibles.
En particular, no es indescomponible (ssi no, $\alpha = 1 \cdot \alpha$).
Pero si α se descompone

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

entonces

$$\kappa(\gamma, \alpha) = \kappa(\gamma, \beta_1) + \kappa(\gamma, \beta_2)$$

donde cada término es estrictamente positivo, luego $\kappa(\gamma, \beta_i) < \kappa(\gamma, \alpha)$; la minimalidad de $\kappa(\gamma, \alpha)$ implica que β_i es combinación lineal entera no negativa de raíces simples, y, por lo tanto, α también (absurdo).

2. si $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ entonces $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$ salvo cuando $\alpha = \beta$.

En efecto, si $\kappa(\alpha, \beta) > 0$, entonces $\alpha - \beta$ sería raíz. Hay dos posibilidades, $\alpha - \beta \in \Phi^+$ o $\beta - \alpha \in \Phi^+$.

En el primer caso, $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, luego α se descompondría, absurdo. El otro caso es análogo.

3. $\Delta(\gamma)$ es un conjunto l.i.

Si no lo fuera, supongamos

$$0 = \sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha$$

con $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Separando los índices entre los α tales que $r_\alpha > 0$ y los α donde $r_\alpha < 0$ podemos escribir

$$\sum t'_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$$

con $t'_\alpha, t_\beta > 0$ y el conjunto $\{\alpha \text{ tales que } t'_\alpha := r_\alpha > 0\}$ disjunto de $\{\beta \text{ tales que } t_\beta := -r_\beta > 0\}$.

Llamemos $\epsilon := \sum t'_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$, luego

$$\kappa(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha, \beta} t'_\alpha t_\beta \kappa(\alpha, \beta)$$

y $\kappa(\alpha, \beta) \leq 0$ pues son indescomponibles diferentes.
$\Rightarrow ||\epsilon||^2 \leq 0 \Rightarrow \epsilon = 0$. pero...

$$0 = \kappa(\gamma, \epsilon) = \sum_{\alpha} t'_\alpha \kappa(\gamma, \alpha)$$

y $\kappa(\gamma, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Phi^+ \Rightarrow t'_\alpha = 0$ para todo α. De manera similar $t_\beta = 0 \forall \beta$.

Notar que $\Delta(\gamma)$ genera, pues genera Φ^+, y $\Phi = \Phi^+ \coprod (-\Phi^+)$, y Φ genera E.

4. Todo sistema de raíces simples Δ es de la forma $\Delta(\gamma)$.

Sea Δ un sistema de raíces simples.

Ejercicio: la intersección de semiespacios dados por una base es un conjunto no vacío.

$\Rightarrow \exists \gamma \in E : \kappa(\gamma, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta$

$$\Rightarrow \kappa(\gamma, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Phi^+ \Rightarrow \Phi^+ \subseteq \Phi^+(\gamma)$$

Pero también

$$\kappa(\gamma, \alpha) < 0 \forall \alpha \in (-\Phi^+) = \Phi^- \Rightarrow \Phi^- \subseteq \Phi^-(\gamma)$$

Como $\Phi = \Phi^+ \coprod \Phi^-$ entonces valen las igualdades.

Matriz de Cartan

Sea E un espacio euclídeo, Φ un conjunto de raíces y Δ un sistema de raíces simples, que enumeramos $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$; la matriz A de coeficientes

$$A_{ij} := \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}$$

se denomina la **matriz de Cartan** de Φ.
Sus coeficientes $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \dfrac{2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa(\alpha_j, \alpha_j)}$ son enteros y se denominan enteros de Cartan.

$$A \in \mathbb{Z}^{\ell \times \ell}$$

Ejemplo

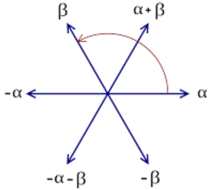
Para rango 2, las matrices de Cartan son las de los siguientes tipos

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

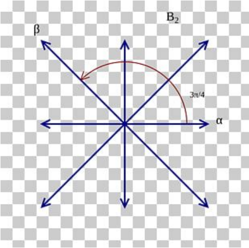
$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

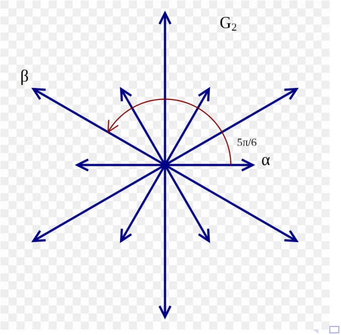
Notar que en la diagonal tienen 2,
afuera de la diagonal tienen 0,-1,-2,-3.
$A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$.

$A_2 : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$



$B_2 : \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$





Propiedades de las matrices de Cartan:

1. $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo ij.
2. $A_{ii} = 2$, *i.e.* los coeficientes de la diagonal son todos iguales a 2 pues $A_{ii} = 2\frac{\kappa(\alpha_i,\alpha_i)}{\kappa(\alpha_i,\alpha_i)} = 2$.
3. $A_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.
4. $A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2, 3$
5. $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$
6. Existe una matriz diagonal D tal que $D_{ii} > 0$ y DAD^{-1} es simétrica definida positiva, en particular A es no singular. Más precisamente, $D_{ii} = |\alpha_i| = \sqrt{\kappa(\alpha_i, \alpha_i)}$ y $(DAD^{-1})_{ij} = 2\kappa(\alpha_i, \alpha_j)$, que son los coeficientes de la matriz del producto interno en E.