Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 14

Teorema de completa reducibilidad de Weyl.

Sistemas de raíces.

Recordamos

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V) = \left\{ D : \mathfrak{g} \to V : D([x, y]) = x.D(y) - y.D(x) \right\}$$

$$InDer(\mathfrak{g}, V) = \left\{ D : \mathfrak{g} \to V : \exists v_0 \in V \ / \ D(x) = x.v_0 \right\}$$

Observación

$InDer(\mathfrak{g}, V) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V)$

1er Lema de Whitehead

$\mathfrak{g}$ ss, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty \Rightarrow InDer(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V)$.

Teorema (Weyl: Semisimplicidad o completa reducibilidad de las representaciones de dimensión finita)

V una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, entonces $V \cong \bigoplus_i S_i$ con S_i subrepresentaciones simples.

Usamos el Lema de Whitehead, que usaba que el casimir, en las simples, actúa por cero sólo en la trivial.

ok $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, lo veremos más adelante para las s.s. en gral.

Por induccion en $\dim_{\mathbb{C}} V$. Si V es simple $\checkmark$

V no simple $\Rightarrow \exists 0 \neq S \subsetneq V$ con S simple.
Sea $p_0 : V \to S$, $\mathbb{C}$-lineal tal que $p_0|_S = \mathrm{Id}_S$.
$\Rightarrow V = S \oplus \mathrm{Ker}(p_0)$ como espacio vectorial.
Si p_0 fuera morfismo $\checkmark$

Consideremos transformaciones lineales de la forma

$$p = p_0 + q$$

con $q : V \to S$ verificando que $q(S) = 0$.

$$W := \{q : V \to S \text{ tal que } q(S) = 0\} \subset \mathrm{Hom}(V, S)$$

es subrepresentación de $\mathrm{Hom}(V, S)$.
Definimos $D : \mathfrak{g} \to W$ via

$$D(x)(v) = xp_0(v) - p_0(x.v)$$

$$W = \{q : V \to S \text{ tal que } q(S) = 0\} \subset \mathrm{Hom}(V, S)$$

$$D(x)(v) = xp_0(v) - p_0(x.v)$$

Efectivamente $D(x) \in W \ \forall x \in \mathfrak{g}$ pues,

$$s \in S \Rightarrow D(x)(s) = x.p_0(s) - p_0(x.s) = x.s - x.s = 0$$

Observamos $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, W)$. En realidad,

$$D(x) = x \cdot p_0$$

pero $p_0 \in \mathrm{Hom}(V, S) \setminus W$.

Por Whitehead $\exists f \in W$ tal que $D(x) = x \cdot f$, es decir,

$$D(x)v = xp_0(v) - p_0(xv) = xf(v) - f(xv) \quad (x \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

$$p_1 := p_0 - f \ \Rightarrow \quad p_1(xv) = xp_1(v)$$

$\therefore p_1 : V \to S$ es morfismo y (como $f|_S = 0$) $p_1|_S = \mathrm{Id}_S$
$\Rightarrow V = S \oplus \mathrm{Ker}(p_1)$.

2da parte

hacia la axiomática de los sistemas de raíces

Corolarios de $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Corolario

En $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ la forma de Killing está dada por

$$\kappa(H, H') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H')$$

es decir,

$$\boxed{\boxed{\kappa\big|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = \textstyle\sum_{\alpha \in \Phi} \alpha \otimes \alpha}}$$

dem:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \Big) \Rightarrow$$

ad_H es 0 en $\mathfrak{h}$ y $\alpha(H)\mathrm{Id}$ en $\mathfrak{g}_\alpha$
$\Rightarrow \mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_{H'}$ actúa por 0 en $\mathfrak{h}$ y por $\alpha(H)\alpha(H')$ en $\mathfrak{g}_\alpha$

Tomando traza, como $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1$

$$\kappa(H, H') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H')$$

Geometría en el espacio real generado por las raíces

Recordamos $\beta(H_\alpha)$ es múltiplo racional de $\alpha(H_\alpha)$.

Corolario

$E := \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$ el subespacio **real** *generado por todas las raíces α en $\mathfrak{h}^*$. Entonces la restricción de κ en $E \times E$ es un producto interno. Es decir, E es un espacio Euclídeo.*

Si $\mathfrak{h}_0 :=$ el subespacio **real** *de $\mathfrak{h}$ generado por los H_α, entonces $\mathfrak{h}_0$ es una forma real de $\mathfrak{h}$ y los elementos de V son exactamente las funciones lineales en $\mathfrak{h}$ que toman valores reales en $\mathfrak{h}_0$, es decir, $E \cong \mathfrak{h}_0^*$, el dual real.*

dem: Veremos que es p.i. El resto es standard.
$\phi, \phi' \in \mathbb{R}\Phi$, entonces

$$\kappa(\phi, \phi') = \kappa(H_\phi, H_{\phi'}) = \sum_{\beta \in \Phi} \beta(H_\phi)\beta(H_{\phi'}) = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(\beta, \phi)\kappa(\beta, \phi')$$

$$\Rightarrow \kappa(\phi, \phi) = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(\beta, \phi)^2 \text{ es suma de cuadrados!}$$

Dado $\alpha \in \Phi$, para cada $\beta \in \Phi$: $\beta(H_\alpha) = q_\beta \alpha(H_\alpha)$ con $q_\beta \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \kappa(\alpha, \alpha) = \Big(\sum_{\beta \in \Phi} q_\beta^2\Big)\kappa(\alpha, \alpha)^2, \qquad \kappa(\alpha, \alpha) \neq 0 \Rightarrow$$

$$1 = \Big(\overbrace{\sum_{\beta \in \Phi} q_\beta^2}^{\in \mathbb{Q}}\Big)\kappa(\alpha, \alpha) \Rightarrow \kappa(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \kappa(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow \kappa(\mathbb{R}\Phi, \mathbb{R}\Phi) \subseteq \mathbb{R}$.

Otra consecuencia de $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$:

Corolario

$\forall \alpha \in \Phi$, los vectores $0 \neq E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $0 \neq E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$
tales que $[H, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha(H) E_\alpha$
pueden ser elegidos de manera tal que $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, y

$$\mathfrak{sl}_\alpha := \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}E_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}H_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

dem: $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ no degenerada, si $0 \neq E_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha} \Rightarrow \kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) \neq 0$. Normalizamos para $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$

$$\Rightarrow [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

También vale

$$[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha(H_\alpha) E_\alpha$$

$$[H_\alpha, E_{-\alpha}] = -\alpha(H_\alpha) E_\alpha.$$

Tomamos

$$E'_\alpha = E_\alpha, \ E'_{-\alpha} = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} E_{-\alpha}, \ H'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$$

entonces vale

$$[E'_\alpha, E'_{-\alpha}] = H'_\alpha$$

$$[H'_\alpha, E'_\alpha] = 2E'_\alpha$$

$$[H'_\alpha, E'_{-\alpha}] = -2E'_\alpha \ \checkmark$$

Coro de las acciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: Integralidad

Llamamos α-cuerda al subconjunto de Φ
$\{\gamma \in \Phi : \gamma = \beta + n\alpha, n \in \mathbb{Z}\}$

Proposición

Sea $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi \cup \{0\}$.

1. *La α-cuerda que contiene a β tiene la forma $\beta + n\alpha$ donde $-p \leq n \leq q$, con $p, q \geq 0$, sin huecos, y*

$$p - q = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}$$

   en particular $\frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

2. *Si $\beta + n\alpha$ nunca es cero, definimos $\mathfrak{sl}_\alpha$ como antes, $V := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$, es una rep. irreducible de $\mathfrak{sl}_\alpha$.*

dem: $\beta + n\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \pm\alpha$. Supondremos $\beta + n\alpha$ nunca cero y mostremos 1 y 2.
$H'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$. Los autovalores de $\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$ en V son

$$(\beta + n\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}(\beta + n\alpha)(H_\alpha)$$

$$= \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} + 2n$$

y son enteros $\Rightarrow \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.
Como para distintos $n \in \mathbb{Z}$, los autovalores son diferentes, cualquier subespacio H'_α-invariante es suma directa de ciertos $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ y lo mismo para los $\mathfrak{sl}_\alpha$-invariantes.

Sea V_m un subespacio $\mathfrak{sl}_\alpha$-invariante e irreducible y sean $-p$ y q, respectivamente, el mínimo y el máximo n que aparece en V_m, es decir que los elementos de la α-cuerda que contiene a β correspondientes a elementos de V son

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta + 0, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \cdots, \beta + q\alpha$$

aunque toda la α-cuerda que contiene a β consiste eventualmente de

$$\cdots, \beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta + 0, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \cdots, \beta + q\alpha, \cdots$$

Sabemos que los autovalores de $\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$ en cualquier representación irreducible de dimensión finita son de la forma $-m, -(m-2), \ldots, m-2, m$

Los autovalores de $\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$: $-m, -(m-2), \ldots, m-2, m$ saltan “de a dos”, entonces el n

$$(\beta + n\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} + 2n$$

“salta de a 1”, y

$$m = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} + 2q$$

$$-m = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} - 2p$$

Despejando:

$$\frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = p - q$$

Si ahora $\widetilde{V}$ es otra componente irreducible de $V \Rightarrow$ (mismo argumento)

$$\frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = p' - q'$$

donde $-p'$ y q' son, respectivamente, el mínimo y el máximo n tal que $0 \neq \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ aparece en V.
Notar entonces que $p - q = p' - q'$. Como V_m y $\widetilde{V}$ están en suma directa, necesariamente $q < -p'$ o $q' < -p$.
Consideremos $q < -p'$:

$$\cdots, \beta - p\alpha, \cdots, \beta + q\alpha, \cdots, \beta - p'\alpha, \cdots, \beta + q'\alpha, \cdots$$

$$-p \leq q < -p' \leq q'$$

$$\Rightarrow \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = q - p < q - p' < q' - p' = \frac{2\kappa(\beta,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)}$$

absurdo!

Sea E un espacio Euclídeo, i.e. con producto interno, llamémoslo *ka*. Para cada $0 \neq \alpha \in E$

$$\rightsquigarrow s_\alpha\text{=la reflexión con respecto al vector } \alpha$$

$$\psi \mapsto s_\alpha(\psi) = \psi - \frac{2(\alpha, \psi)}{|\alpha|^2}\alpha$$

En efecto,

$$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$$

$$\psi \in \alpha^\perp \Rightarrow s_\alpha(\psi) = \psi$$

Proposición

$\forall \alpha \in \Phi$, la reflexión s_α con respecto a α preserva Φ.

Al grupo generado por estas reflexiones se lo llama **grupo de Weyl**, es finito!

dem: Sea β una raíz, entonces

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\kappa(\alpha,\beta)}{\kappa(\alpha,\alpha)}\alpha = \beta - (p-q)\alpha = \beta + (q-p)\alpha$$

$-p \leq q - p \leq q \Rightarrow \beta + (q-p)\alpha$ está en la α-cuerda que pasa por β, y no puede ser cero porque las reflexiones preservan la norma $\Rightarrow s_\alpha(\beta)$ es una raíz.

Axiomática de Sistemas de raíces

Un subconjunto Φ de un espacio euclídeo E con p.i. κ, se llama un **sistema de raíces** en E si:

(RI) $|\Phi| < \infty$, $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = E$, $0 \notin \Phi$

(R2) $\alpha \in \Phi \Rightarrow$ los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$

(R3) $\alpha \in \Phi \Rightarrow s_\alpha(\Phi) = \Phi$

(R4) $\alpha, \beta \in \Phi \Rightarrow \dfrac{2\kappa(\alpha, \beta)}{\kappa(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$