Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Clase 13

Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
Primer Lema de Whitehead.

Teorema

$\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\exists!\, V_{m-1}, \qquad \dim V_{m-1} = m$$

V_{m-1} representacion simple de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

En V_{m-1} existe una base $v_0, \ldots, v_{m-1}$ tal que

$$Y \cdot v_i = v_{i+1}, \qquad \forall 0 \leq i \leq m-1 \ (v_m = 0)$$

$$H \cdot v_i = (m-1-2i)v_i, \qquad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$X \cdot v_i = i(m-i)v_{i-1},\ 1 \leq i \leq m, \quad X \cdot v_0 = 0,$$

Sea V simple, $\dim_{\mathbb{C}} V = m$, $\exists 0 \neq v \in V : Hv = \lambda v$.

$[H, X] = 2X \Rightarrow$

$$H(Xv) = [H, X]v + X(Hv) = 2Xv + X(\lambda v) = (2 + \lambda)Xv$$

Xv es autovector de H de autovalor $\lambda + 2$ y siguiendo con este proceso, $X^2 v$, $X^3 v \ldots$ son todos autovectores de respectivos autovalores $\lambda + 4$, $\lambda + 6, \ldots$ *etc*.

$\dim_{\mathbb{C}} V < \infty \Rightarrow$ no pueden ser $X^i v$ todos no nulos (serían todos l.i.!)
$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X^{k_0} v = 0$ y $X^{k_0 - 1} v \neq 0$.
Llamamos $v_0 := X^{k_0} v$. Es autovector de H, y $Xv_0 = 0$.
Hemos encotrado un "vector de peso máximo".

Renombrando, supongamos

$$Hv_0 = \lambda v_0$$

(y sabemos $Xv_0 = 0$)
$[H, Y] = -2Y \Rightarrow Y^j v_0$ son todos autovectores de H, de autovalor $\lambda - 2j$, y $\exists$ un primer n_0 tal que $Y^{n_0} v_0 = 0$.

Sea $v_i := Y^i v_0$ y $S = \bigoplus_{i=0}^{n_0-1} \mathbb{C} v_i$
S es estable por Y y por H, pues

$$Hv_i = (\lambda - 2i) v_i$$

veamos que es estable por X:

Tenemos $Xv_0 = 0$. E inducivamente

$$\begin{aligned} Xv_{i+1} = XYv_i &= [X, Y]v_i + Y(Xv_i) \\ &= Hv_i + Y(Xv_i) \\ &= (\lambda - 2i)v_i + Y\underbrace{(\ X\ v_i\ )}_{\text{h.i.}\in S} \end{aligned}$$

$\therefore V = S$.
Ya tenemos

$$Xv_0 = 0$$

$$Yv_i = v_{i+1}$$

$$H(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$$

Veamos $Xv_i = i(m-i)v_{i-1}\ \forall\ 1 \leq i \leq m$ por inducción en i.

$Xv_i = i(m-i)v_{i-1} \; \forall 1 \leq i \leq m$

Definamos $v_{-1} = 0$, entonces

$$Xv_0 = 0 = 0(m-0)v_{-1}$$

Ahora inductivamente, para $i+1$,

$$Xv_{i+1} = XYv_i = [X, Y]v_i + YXv_i$$

$$= Hv_i + Yi(m-i)v_{i-1}$$

$$= (\lambda - 2i)v_i + i(m-i)v_i$$

$$= (\lambda - 2i + i(m-i))v_i$$

Notar: si λ fuera igual a $m-1$, tendríamos

$$\lambda - 2i + i(m-i) = \lambda - 2i + i(\lambda - i + 1) = \lambda - i + i(\lambda - i)$$

$$= (\lambda - i)(i+1) = (i+1)(m-(i+1))$$

Para ver que $\lambda = m - 1$, calculemos la traza de $H|_V$ de dos maneras distintas.

$$H|_V = X|_V Y|_V - Y|_V X|_V \Rightarrow \mathrm{tr}(H|_V) = 0$$

Pero $H|_V$ es diagonal

$$\Rightarrow 0 = \mathrm{tr}(H|_V) = \sum_{i=0}^{m-1}(\lambda - 2i)$$

$$= m\lambda - 2\sum_{i=0}^{m-1} i$$

$$= m\lambda - 2\frac{(m-1)m}{2}$$

$$= m(\lambda - (m-1))$$

$\therefore \lambda = m - 1$ ✓

Dibujo

Autovalores de H

$$V_0 \qquad \overset{\color{red}{0}}{v_0}$$

$$V_1 \qquad \begin{tikzcd} \overset{\color{red}{+1}}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{-1}}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

$$V_2 \qquad \begin{tikzcd} \overset{\color{red}{+2}}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{0}}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{-2}}{v_2} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

$$V_3 \qquad \begin{tikzcd} \overset{\color{red}{+3}}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{+1}}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{-1}}{v_2} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{\color{red}{-3}}{v_3} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

Realización Polinomial

$$\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[x,y]_n$$

$$\rho(X) = D_X := x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(Y) = D_Y := y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho(H) = D_H := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

En $\mathbb{C}[x,y]_n$, $v_0 = x^n$, $v_i = cte.x^{n-i}y^i$.

Para el Teorema de Weyl,

Teorema (Weyl: Completa reducibilidad)

Toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *es suma directa de copias como las del teo anterior.*

necesitaremos del Casimir:

El Casimir

$\mathfrak{g}$ ss. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ base y $\{x^1, \ldots, x^n\}$ tal que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

Se define, para cada V, el endomorfismo

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i : V \to V$$

Se lo denomina **"El Casimir"**.

El Casimir: Ejemplo: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\kappa(H, H) = 8, \ \kappa(X, Y) = \kappa(Y, X) = 4$$

Si $B = \{H, X, Y\}$, la base "dual" es $\{\frac{1}{8}H, \frac{1}{4}Y, \frac{1}{4}X\}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{8}H^2 + \frac{1}{4}(XY + YX)$$

o mejor dicho, para cada representación V, $\omega|_V : V \to V$

$$\omega(v) = \frac{1}{8}H^2v + \frac{1}{4}(XYv + YXv)$$

Independencia de base:

Si $y_k = a^i_k x_i$,

$$\kappa(y_k, x^j) = a^j_k$$

$$\kappa(y_k, (a^{-1})^\ell_j x^j) = (a^{-1})^\ell_j a^j_k = \delta^k_j$$

$$\Rightarrow y^\ell = (a^{-1})^\ell_j x^j$$

$$\Rightarrow y_k y^k = (a^i_k x_i)((a^{-1})^k_j x^j)$$

$$= a^i_k (a^{-1})^k_j x_i x^j$$

$$= \delta^j_i x_i x^j$$

$$= x_i x^i$$

Centralidad

$$
\begin{aligned}
\omega y &= \sum_i x_i x^i y \\
&= \sum_i x_i [x^i, y] + \sum_i x_i y x^i \\
&= \sum_i x_i [x^i, y] + \sum_i [x_i, y] x^i + \sum_i y x_i x^i \\
&= \sum_i x_i [x^i, y] + \sum_i [x_i, y] x^i + y\omega \\
&= -\sum_i x_i [y, x^i] + \sum_i [x_i, y] x^i + y\omega \\
&\stackrel{?}{=} y\omega ??
\end{aligned}
$$

$$-\sum_i x_i[y, x^i] + \sum_i [x_i, y]x^i$$

$$x \in \mathfrak{g} \Rightarrow x = \kappa(x, x_j)x^j = \kappa(x, x^j)x_j.$$

$$[x, y] = \kappa([x, y], x_j)x^j = \kappa(x, [y, x_j])x^j =$$

$$\Rightarrow \sum_j [x_j, y]x^j = \sum_{i,j} \kappa([x_j, y], x^i)x_i x^j$$

$$-\sum_i x_i[y, x^i] = -\sum_{ij} x_i \; \kappa([y, x^i], x_j)x^j$$

$$= \sum_{ij} x_i \; \kappa([x^i, y], x_j)x^j$$

$$= \sum_{ij} x_i \; \kappa(x^i, [y, x_j])x^j$$

$$= \sum x_i \; \kappa([y, x_j], x^i)x^j \qquad \checkmark$$

Ejemplo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\omega = \frac{1}{8}(H^2 + \frac{1}{4}(XY + YX) = \frac{1}{8}(H^2 + 2XY + 2YX)$$

Casimir+Lema de Schur

V es simple

$$\Rightarrow \omega|_V = cte_V \mathrm{Id}$$

El Casimir en $\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[x,y]_n$

Ejercicio: chequear las cuentas!

$$\rho(X) = D_X = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(Y) = D_Y = y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho(H) = D_H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_H^2 = x\partial_x + x^2\partial_x^2 + y\partial_y + y^2\partial_y^2 - 2xy\partial_{xy}^2$$

$$D_X D_Y = x\partial_y(y\partial_x(-)) = x\partial x + xy\partial_{yx}^2$$

$$D_Y D_X = y\partial_x(x\partial_y(-)) = y\partial_y + yx\partial_{xy}^2$$

$$\omega = \frac{1}{8}\Big(H^2 + 2XY + 2YX\Big)$$

$$= \frac{1}{8}\Big(3x\partial_x + 3y\partial_y + x^2\partial_x^2 + y^2\partial_y^2 + 2xy\partial_{xy}^2\Big)$$

$$\omega = \frac{1}{8}\left(3x\partial_x + 3y\partial_y + x^2\partial_x^2 + y^2\partial_y^2 + 2xy\partial_{xy}^2\right)$$

$$x^i y^j \mapsto \frac{1}{8}\underbrace{\left(3i + 3j + i(i-1) + j(j-1) + 2ij\right)}_{(*)} x^i y^j$$

$$\begin{aligned}(*) &= 2i + 2j + i^2 + j^2 + 2ij \\ &= 2(i+j) + (i+j)^2\end{aligned}$$

si $m = i + j$

$$= m^2 + 2m = m(m+2)$$

$$\boxed{\therefore \omega|_{V_m} = cte_m \mathrm{Id} = \tfrac{m(m+2)}{8}\mathrm{Id}}$$

Ejercicio: En $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ tomamos

$$j_1 = e_1\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ j_2 = e_2\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ j_3 = e_3\times = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ver que $\kappa(j_a, j_b) = cte\delta_{ab}$.
Concluimos que, a menos de múltiplo, el casimir es

$$j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$$

$$j_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix},\ j_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix},\ j_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos $V = \mathbb{C}[x, y, z]$ y $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ actúa vía

$$J_1 := y\partial_z - z\partial_y$$

$$J_2 := z\partial_x - x\partial_z$$

$$J_3 := x\partial_y - y\partial_x$$

$J_i(x^2+y^2+z^2)=0 \Rightarrow J_i \curvearrowright C^\infty(S^2)$. $J_1^2+J_2^2+J_3^2 = \Delta_{Sph}$

Corolario

Sea $V \neq \mathbb{C}$ *una representación simple de dimensión finita de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$*, entonces* $\omega|_V = c_V \mathrm{Id}$ *con* $0 \neq c_V \in \mathbb{C}$*.*

Corolario

Sea V una representación compleja de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$; si ω actúa por cero, entonces $V = V^{\mathfrak{g}}$.

Inducción en $\dim_{\mathbb{C}} V$. Si V es simple $\checkmark$.
V no simple $\Rightarrow \exists 0 \neq S \subseteq V$ simple.
$\omega|_S = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}$ actua trivialmente en $S \Rightarrow \mathbb{C} \cong S = \mathbb{C}s_0$.
También $\omega|_{V/S} = 0 \Rightarrow$ (H.I.) $\mathfrak{g}$ actúa trivialmente en V/S.

$$x \cdot \overline{v} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot v \in S \;\Rightarrow\; x \cdot v = \underbrace{D(x)}_{\in\mathbb{C}} s_0$$

$$y.(x.v) = y.D(x)s_0 = 0$$

$$x.(y.v) = x.D(y)s_0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = x.(y.v) - y.(x.v) = [x,y].v = D([x,y])s_0$$

$\Rightarrow D([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0 \Rightarrow D \equiv 0$.

Corolario

Si V es una representación compleja de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, entonces $\mathrm{Ker}(\omega : V \to V) = V^{\mathfrak{g}}$.

dem: Es claro que $V^{\mathfrak{g}} \subseteq \mathrm{Ker}(\omega|_V)$.

$\mathrm{Ker}(\omega) \subseteq V$ es una subrepresentación,

$\omega|_{\mathrm{Ker}(\omega)} \equiv 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\omega|_V) = \mathrm{Ker}(\omega|_V)^{\mathfrak{g}} \subseteq V^{\mathfrak{g}}$.

Lema de Whitehead y Teorema de Weyl

Definición

Sea V una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V) = \{D : \mathfrak{g} \to V : D([x, y]) = x.D(y) - y.D(x)\}$$

$$InDer(\mathfrak{g}, V) = \{D : \mathfrak{g} \to V : \exists v_0 \in V \ / \ D(x) = x.v_0\}.$$

Observación

$InDer(\mathfrak{g}, V) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V)$

En efecto, si $D(x) = x.v_0 \Rightarrow$

$$D([x, y]) = [x, y].v_0 = x.(y.v_0) - y(x.v_0) = x.D(y) - y.D(x)$$

Teorema (Lema de Whitehead)

Sea V *una representación de* $\mathfrak{g}$, $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, $\mathfrak{g}$ *ss, entonces* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V) = \mathit{InDer}(\mathfrak{g}, V)$.

dem: algunos lemas..

Lema

Vale el Lema de Whitehead para $V = \mathbb{C}$.

dem: $D : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ es una derivación

$$\Rightarrow D([x, y]) = xD(y) - yD(x) = 0$$

$\Rightarrow D([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0 \Rightarrow D \equiv 0$. En particular es interior..

Supondremos demostrado ω actúa por escalar no nulo en toda rep-simple no trivial
(ok para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, demostraremos en gral para ss luego)

Lema

$\mathfrak{g}$ ss, $V \neq \mathbb{C}$ una rep. simple. Entonces vale el Lema de Whiteghead para V: $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V) = \mathit{InDer}(\mathfrak{g}, V)$

dem: Sea $D : \mathfrak{g} \to V$ una derivación, $\{x_i\}_i$, $\{x^i\}_i$ bases duales c.r.a. κ. Usamos $\omega \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, es decir,

$$\sum_i [y, x_i] \otimes x^i + x_i \otimes [y, x^i] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (yx_i - x_i y) D(x^i) + x_i D([y, x^i]) = 0$$

$$D \in \mathrm{Der} \Rightarrow = \sum_i \Big(yx_i D(x^i) - x_i y D(x^i) + x_i y D(x^i) - x_i x^i D(y) \Big)$$

$$= y \Big(\sum_i x_i D(x^i) \Big) - \underbrace{\Big(\sum_i x_i x^i \Big)}_{=\omega} D(y)$$

$$\omega|_V = c_V \mathrm{Id} \quad \Rightarrow \quad D(y) = \frac{1}{c_V} y . \Big(\sum_i x_i D(x^i) \Big)$$

dem Der=InDer en general:
dim $V < \infty$. Si V es simple, ✓
V no simple $\Rightarrow \exists 0 \neq S \subsetneq V$. $\dim_C V/S < \dim_{\mathbb{C}} V \Rightarrow$

$$\widetilde{D} : \mathfrak{g} \to V/S$$

$$x \mapsto \overline{D(x)}$$

es interior.

$$\Rightarrow \exists \overline{v_0} : \overline{D(x)} = x \cdot \overline{v_0} = \overline{x \cdot v_0}$$

$$\Rightarrow \widetilde{D}(x) := D(x) - x \cdot v_0 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, S)$$

$$\Rightarrow \exists s_0 : \widetilde{D}(x) = D(x) - x \cdot v_0 = x \cdot s_0$$

$$\Rightarrow D(x) = x \cdot (v_0 + s_0)$$