Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 12

Subálgebras de Cartan en álgebras de Lie semisimples, primeras propiedades de las raíces.

Proposición

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *subálgebra de Cartan de una ss compleja*

entonces $\mathfrak{h}$ *es abeliana.*

Dem: Veremos $\kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{g})=0$

Descomponemos $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$ como pesos c.r.a. $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha\right)=\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha\right)$$

Empezamos con $\kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{h})$.

$\mathfrak{h}$ nilpo $\Rightarrow$ soluble $\Rightarrow$ en alguna base,
las matrices de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ son triangulares $\subset \mathrm{End}(\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}})$.

Si A, B, C son matrices triangulares
$\Rightarrow \mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BAC)\Rightarrow \kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{h})=0$

Sea $0 \neq \alpha \in \Phi$, veamos $\kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{g}_\alpha) = 0$.
$x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x,y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \quad [H,[x,y]] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

$\Rightarrow \mathrm{ad}_H(\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}_\beta)) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

además, $\mathrm{ad}_H(\mathrm{ad}_x(\mathfrak{h})) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$,

$\therefore$ la matriz de $\mathrm{ad}_H \circ \mathrm{ad}_x$ en alguna base (adaptada a la desc. en pesos) tiene estructura de bloques fuera de la diagonal $\Rightarrow$ su traza es cero, es decir

$$\kappa(\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha) = 0$$

en particular $\kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{g}_\alpha) = 0 \Rightarrow \kappa([\mathfrak{h},\mathfrak{h}],\mathfrak{g}) = 0$

Observaciones

La demostración anterior también prueba

- $\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$, luego $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ es no degenerada.
- Si $\alpha \neq -\beta \Rightarrow \kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$
- $\kappa| : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{C}$ es no deg. En particular $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$

dem: $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \Rightarrow (\mathrm{ad}_{x_\alpha} \circ \mathrm{ad}_{y_\beta})(\mathfrak{g}_\mu) \subseteq \mathfrak{g}_{\mu+\alpha+\beta}$

Coro: $\mathfrak{g}$ simple, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3 \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Ejercicios para el hogar

- Hacer el dibujo (en $\mathbb{R}^3$) del sistema de raíces de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.
- Hacer el ejercicio de las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$. Hacer explícitamente el dibujo (en $\mathbb{R}^3$) del sistema de raíces de $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C})$.
- Sospechar de lo anterior que $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.
- Mostrar que $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.

Prop:

El conjunto Φ de todas las raíces genera $\mathfrak{h}^*$

dem: veremos $\alpha(H) = 0\ \forall\alpha \in \Phi \Rightarrow H = 0$.
Sea $H \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$.
Recordando

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

$\Rightarrow \mathrm{ad}_H$ es nilpotente.

Como $\mathfrak{h}$ es abeliana $\Rightarrow \mathrm{ad}_H \circ \mathrm{ad}_{H'}$ es nilpotente $\forall H' \in \mathfrak{h}$.

$\Rightarrow \kappa(H, H') = 0\ \forall H' \in \mathfrak{h}$

$\Rightarrow H = 0$, pues $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ es no degenerada.

Lema

$\mathfrak{g}$ ss compleja y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ de Cartan.

1. $\alpha \in \Phi \Rightarrow \exists 0 \neq E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ *tal que*

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

2. $\alpha \in \Phi$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \Rightarrow [E_\alpha, y] = \kappa(E_\alpha, y)H_\alpha$
   donde E_α es el del item 1.
3. $\alpha, \beta \in \Phi \Rightarrow \beta(H_\alpha)$ *es múltiplo racional de* $\alpha(H_\alpha)$.
4. $\alpha \in \Phi \Rightarrow \alpha(H_\alpha) \neq 0$.

1. Se sigue del Teorema de Lie para $\mathfrak{h}$ y $V = \mathfrak{g}_\alpha$.

2. $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. $[E_\alpha, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Como $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ es no degenerda,

$$[E_\alpha, y] = \kappa(E_\alpha, y) H_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \kappa([E_\alpha, y], H) = \kappa(E_\alpha, y)\kappa(H_\alpha, H)\ \forall H \in \mathfrak{h}$$

RHS: $= \kappa(E_\alpha, y)\alpha(H)$

LHS:

$$\kappa([E_\alpha, y], H) = -\kappa([y, E_\alpha], H) = -\kappa(y, [E_\alpha, H])$$

$$= \kappa(y, [H, E_\alpha]) = \kappa(y, \alpha(H)E_\alpha) = \kappa(y, E_\alpha)\alpha(H) \quad \checkmark$$

3. Killing no singular

$$\Rightarrow \exists x \in \mathfrak{g}_{-\alpha} : \kappa(x_{-\alpha}, E_\alpha) = 1$$

Entonces, 2. dice

$$[E_\alpha, x] = \kappa(E_\alpha, x) H_\alpha = H_\alpha$$

$\beta \in \Phi$, sea

$$V := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha}$$

Es invariante por ad_{H_α}, por $\mathrm{ad}_{x_{-\alpha}}$ y por E_α.
Calcularemos la traza de ad_{H_α} en V de dos maneras distintas.

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_V) = \mathrm{tr}([\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}|_V, \mathrm{ad}_{E_\alpha}|_V]) = 0$$

Pero H_α tiene autovalor generalizado $\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)$ en $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$.

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha})|_{\mathfrak{g}'} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)) \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

Esto muestra 3.
4. Si $\alpha(H_\alpha) = 0 \Rightarrow$ por 3, $\beta(H_\alpha) = 0\ \forall \beta \in \Phi \Rightarrow H_\alpha = 0$, absurdo, porque $\alpha \neq 0$.

Proposición

Si $\alpha \in \Phi$*, entonces* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

y $n\alpha \notin \Phi$ *para ningún entero* $n \geq 2$*.*

En particular $\mathfrak{g}_\alpha$ es de peso (i.e. no sólo de peso generalizado)

dem: $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\kappa(x_{-\alpha}, E_\alpha) = 1$, $\Rightarrow [x_{-\alpha}, E_\alpha] = H_\alpha$
Si $x' \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \Rightarrow [x', E_\alpha] = \kappa(E_\alpha, x)H_\alpha$

$$\boxed{\text{Sea } W := \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{-n\alpha}\right)}$$

Es estable por ad_{H_α}, ad_{E_α} y $\mathrm{ad}_{x_{-\alpha}}$, $\Rightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_W) = 0$.

ad_{H_α} actúa por cero en $\mathbb{C}H_\alpha$, por $\alpha(H_\alpha)$ en $\mathbb{C}E_\alpha$ y por autovalor generalizado $-n\alpha(H_\alpha)$ en $\mathfrak{g}_{-n\alpha} \Rightarrow$

$$0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_W) = \alpha(H_\alpha) + 0 + \sum_{n\geq 1} -n\alpha(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha}$$

$\alpha(H_\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ despejamos

$$\sum_{n\geq 1} n \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 1$$

$\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ y $\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 0$ si $n \geq 2$.

Paréntesis: representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Teorema

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists!\, V_{m-1}$, $\dim V_{m-1} = m$ *rep simple de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
En V existe una base $v_0, \ldots, v_{m-1}$ tal que

$$Y \cdot v_i = v_{i+1}, \qquad \forall 0 \leq i \leq m-1 \ (v_m = 0)$$

$$H \cdot v_i = (m-1-2i)v_i, \qquad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$X \cdot v_i = i(m-i)v_{i-1},\ 1 \leq i \leq m, \quad X \cdot v_0 = 0,$$

Teorema (Weyl: Completa reducibilidad)

Toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es suma directa de copias como las del teo anterior.

Dibujo

Autovalores de H

V_0

$$\overset{0}{v_0}$$

V_1

$$\begin{tikzcd} \overset{+1}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{-1}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

V_2

$$\begin{tikzcd} \overset{+2}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{0}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{-2}{v_2} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

V_3

$$\begin{tikzcd} \overset{+3}{v_0} \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{+1}{v_1} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{-1}{v_2} \arrow[l, bend left, "X"] \arrow[r, bend left, "Y"] & \overset{-3}{v_3} \arrow[l, bend left, "X"] \end{tikzcd}$$

Ejemplos:

- $V_0 = k$= la representción trivial
- $V_1 = \mathbb{C}^2$= la representación de definición, $\rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $V_2 = \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$, los autovalores de H son $2, 0, -2$, con autovectores X, H, Y resp., pues

$$[H, X] = 2X, \ [H, H] = 0, \ [H, Y] = -2Y$$

$$-X \quad \overset{\mathrm{ad}_Y}{\mapsto} \quad H \quad \overset{\mathrm{ad}_Y}{\mapsto} \quad 2Y$$

Realización Polinomial

$$\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[x,y]_n$$

$$\rho(X) = D_X := x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(Y) = D_Y := y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho(H) = D_H := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

En $\mathbb{C}[x,y]_n$, $v_0 = x^n$, $v_i = cte.x^{n-i}y^i$.

Corolario

$\mathbb{C}^2 = V_1$ *la rep.* $\Rightarrow V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$

Observaciones

Corolario

$\mathbb{C}^2 = V_1$ *la rep.* $\Rightarrow V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$V_2 = \mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$, la complexificación de la rep. de def. de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ NO genera (tensorialmente) todas las reps.

Pero $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2)$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2)$

$\mathbb{C}^2$= la representación de def. de $\mathfrak{su}(2)$, genera (tensorialmente) todas las reps. de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.