

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 12

Subálgebras de Cartan en álgebras de Lie semisimples, primeras propiedades de las raíces.

Proposición

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *subálgebra de Cartan de una ss compleja*
entonces \mathfrak{h} es abeliana.

Dem: Veremos $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}) = 0$

Descomponemos \mathfrak{g}^{ad} como pesos c.r.a. \mathfrak{h} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

Empezamos con $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h})$.

\mathfrak{h} nilpo \Rightarrow soluble \Rightarrow en alguna base,
las matrices de $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ son triangulares $\subset \text{End}(\mathfrak{g}^{\text{ad}})$.

Si A, B, C son matrices triangulares
 $\Rightarrow \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC) \Rightarrow \kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h}) = 0$

Sea $0 \neq \alpha \in \Phi$, **veamos** $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}_\alpha) = 0$.

$x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta, H \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \quad [H, [x, y]] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

$\Rightarrow \text{ad}_H(\text{ad}_x(\mathfrak{g}_\beta)) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

además, $\text{ad}_H(\text{ad}_x(\mathfrak{h})) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$,

\therefore la matriz de $\text{ad}_H \circ \text{ad}_x$ en alguna base (adaptada a la desc. en pesos) tiene estructura de bloques **fuera de la diagonal** \Rightarrow su traza es cero, es decir

$$\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$$

en particular $\kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}_\alpha) = 0 \Rightarrow \kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}) = 0$

Observaciones

La demostración anterior también prueba

- $\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$, luego $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no degenerada.
- Si $\alpha \neq -\beta \Rightarrow \kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$
- $\kappa| : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$ es no deg. En particular
 $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$

dem: $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \Rightarrow (\text{ad}_{x_\alpha} \circ \text{ad}_{y_\beta})(\mathfrak{g}_\mu) \subseteq \mathfrak{g}_{\mu+\alpha+\beta}$

Coro: \mathfrak{g} simple, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 3 \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Ejercicios para el hogar

- Hacer el dibujo (en \mathbb{R}^3) del sistema de raíces de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.
- Hacer el ejercicio de las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$. Hacer explícitamente el dibujo (en \mathbb{R}^3) del sistema de raíces de $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C})$.
- Sospechar de lo anterior que $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.
- Mostrar que $\mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.

Prop:

El conjunto Φ de todas las raíces genera \mathfrak{h}^*

dem: veremos $\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in \Phi \Rightarrow H = 0$.

Sea $H \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$.

Recordando

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

$\Rightarrow \text{ad}_H$ es nilpotente.

Como \mathfrak{h} es abeliana $\Rightarrow \text{ad}_H \circ \text{ad}_{H'}$ es nilpotente $\forall H' \in \mathfrak{h}$.

$\Rightarrow \kappa(H, H') = 0 \forall H' \in \mathfrak{h}$

$\Rightarrow H = 0$, pues $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no degenerada.

Lema

\mathfrak{g} ss compleja y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ de Cartan.

1 $\alpha \in \Phi \Rightarrow \exists 0 \neq E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

2 $\alpha \in \Phi, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \Rightarrow [E_\alpha, y] = \kappa(E_\alpha, y)H_\alpha$
donde E_α es el del item 1.

3 $\alpha, \beta \in \Phi \Rightarrow \beta(H_\alpha)$ es múltiplo racional de $\alpha(H_\alpha)$.

4 $\alpha \in \Phi \Rightarrow \alpha(H_\alpha) \neq 0$.

1. Se sigue del Teorema de Lie para \mathfrak{h} y $V = \mathfrak{g}_\alpha$.

2. $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. $[E_\alpha, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Como $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no degenerada,

$$[E_\alpha, y] = \kappa(E_\alpha, y)H_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \kappa([E_\alpha, y], H) = \kappa(E_\alpha, y)\kappa(H_\alpha, H) \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

$$\text{RHS:} = \kappa(E_\alpha, y)\alpha(H)$$

LHS:

$$\begin{aligned} \kappa([E_\alpha, y], H) &= -\kappa([y, E_\alpha], H) = -\kappa(y, [E_\alpha, H]) \\ &= \kappa(y, [H, E_\alpha]) = \kappa(y, \alpha(H)E_\alpha) = \kappa(y, E_\alpha)\alpha(H) \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Killing no singular

$$\Rightarrow \exists x \in \mathfrak{g}_{-\alpha} : \kappa(x_{-\alpha}, E_{\alpha}) = 1$$

Entonces, 2. dice

$$[E_{\alpha}, x] = \kappa(E_{\alpha}, x)H_{\alpha} = H_{\alpha}$$

$\beta \in \Phi$, sea

$$V := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

Es invariante por $\text{ad}_{H_{\alpha}}$, por $\text{ad}_{x_{-\alpha}}$ y por E_{α} .

Calcularemos la traza de $\text{ad}_{H_{\alpha}}$ en V de dos maneras distintas.

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{H_\alpha}|_V) = \operatorname{tr}([\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}|_V, \operatorname{ad}_{E_\alpha}|_V]) = 0$$

Pero H_α tiene autovalor generalizado $\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)$ en $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$.

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{H_\alpha})|_{\mathfrak{g}'} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)) \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$$

Esto muestra 3.

4. Si $\alpha(H_\alpha) = 0 \Rightarrow$ por 3, $\beta(H_\alpha) = 0 \forall \beta \in \Phi \Rightarrow H_\alpha = 0$, absurdo, porque $\alpha \neq 0$.

Proposición

Si $\alpha \in \Phi$, entonces $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

y $n\alpha \notin \Phi$ para ningún entero $n \geq 2$.

En particular \mathfrak{g}_α es de peso (i.e. no sólo de peso generalizado)

dem: $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\kappa(x_{-\alpha}, E_\alpha) = 1, \Rightarrow [x_{-\alpha}, E_\alpha] = H_\alpha$

Si $x' \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \Rightarrow [x', E_\alpha] = \kappa(E_\alpha, x)H_\alpha$

$$\text{Sea } W := \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{-n\alpha} \right)$$

Es estable por ad_{H_α} , ad_{E_α} y $\text{ad}_{x_{-\alpha}}$, $\Rightarrow \text{tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_W) = 0$.

ad_{H_α} actúa por cero en $\mathbb{C}H_\alpha$, por $\alpha(H_\alpha)$ en $\mathbb{C}E_\alpha$ y por autovalor generalizado $-n\alpha(H_\alpha)$ en $\mathfrak{g}_{-n\alpha} \Rightarrow$

$$0 = \text{tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_W) = \alpha(H_\alpha) + 0 + \sum_{n \geq 1} -n\alpha(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha}$$

$\alpha(H_\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ despejamos

$$\sum_{n \geq 1} n \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 1$$

$\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ y $\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 0$ si $n \geq 2$.

Paréntesis: representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Teorema

$\forall m \in \mathbb{N}, \exists! V_{m-1}, \dim V_{m-1} = m$ rep simple de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

En V existe una base v_0, \dots, v_{m-1} tal que

$$Y \cdot v_i = v_{i+1}, \quad \forall 0 \leq i \leq m-1 \quad (v_m = 0)$$

$$H \cdot v_i = (m-1-2i)v_i, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$X \cdot v_i = i(m-i)v_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X \cdot v_0 = 0,$$

Teorema (Weyl: Completa reducibilidad)

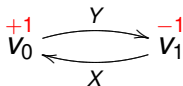
Toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es suma directa de copias como las del teo anterior.

Autovalores de H

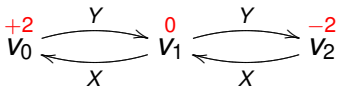
V_0

0
 V_0

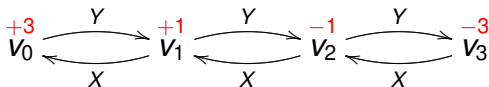
V_1



V_2



V_3



Ejemplos:

- $V_0 = k =$ la representación trivial
- $V_1 = \mathbb{C}^2 =$ la representación de definición,
 $\rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $V_2 = \mathfrak{g}^{\text{ad}}$, los autovalores de H son $2, 0, -2$, con autovectores X, H, Y resp., pues

$$[H, X] = 2X, [H, H] = 0, [H, Y] = -2Y$$

$$-X \quad \xrightarrow{\text{ad}_Y} \quad H \quad \xrightarrow{\text{ad}_Y} \quad 2Y$$

Realización Polinomial

$$\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[x, y]_n$$

$$\rho(X) = D_X := x \frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(Y) = D_Y := y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho(H) = D_H := x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

En $\mathbb{C}[x, y]_n$, $v_0 = x^n$, $v_i = \text{cte.} \cdot x^{n-i} y^i$.

Corolario

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \text{ la rep.} \Rightarrow V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$$

Observaciones

Corolario

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \text{ la rep.} \Rightarrow V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$$

$V_2 = \mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$, la complexificación de la rep. de def. de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ NO genera (tensorialmente) todas las reps.

Pero $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2)$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2)$$

\mathbb{C}^2 = la representación de def. de $\mathfrak{su}(2)$, genera (tensorialmente) todas las reps. de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.