Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Clase 11:

Subálgebras de Cartan. Existencia y primeras propiedades.

Subálgebras de Cartan abstractas

Hoy consideraremos sólo álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$.
$\dim \mathfrak{g} < \infty$, V rep. $\dim V < \infty$.

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie y V una representación de $\mathfrak{h}$.
Si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, el subespacio de peso:

$$V_\alpha^0 = \{v \in V : H(v) = \alpha(H)v, \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

el subespacio de peso generalizado

$$V_\alpha = \left\{v \in V : \left(H - \alpha(H)\mathrm{Id}\right)^n(v) = 0, n \gg 0, \forall H \in \mathfrak{h}\right\}$$

Si $V_\alpha \neq 0$, diremos que α es un **peso** y que
V_α es un espacio de peso generalizado.

Proposición

$\mathfrak{h}$ *álgebra de Lie nilpotente,* $\dim \mathfrak{h} < \infty$*,* V *una representación,* $\dim V < \infty$*. Entonces*

$$V = \bigoplus_{\alpha \text{ peso}} V_\alpha$$

es una suma directa finita de subrepresentaciones.

Es decir, hay finitos $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tales que $V_\alpha \neq 0$,
los V_α son subespacios $\mathfrak{h}$-estables,
y V es suma directa de ellos.

Dem:

Sea α un peso, veamos $\mathfrak{h} \cdot V_\alpha \subseteq V_\alpha$. Como

$$V_\alpha = \cap_{H \in \mathfrak{h}} V_{\alpha,H}$$

donde $V_{\alpha,H} = \{v \in V : (H - \alpha(H)\mathrm{Id})^n(v) = 0, n \gg 0\}$ para H fijo, basta ver que cada $V_{\alpha,H}$ es estable por $\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{h}$ nilpotente $\Rightarrow \mathrm{ad}_H$ es nilpotente. Consideremos

$$\mathfrak{h}_{(m)} = \{Y \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_H^m(Y) = 0\}$$

Por ejemplo, $\mathfrak{h}_{(1)} =$ los que conmutan con H.

$\mathfrak{h}$ nilpo $\Rightarrow \mathfrak{h} = \bigcup_m \mathfrak{h}_{(m)}$.
Veamos por inducción en m que $V_{\alpha,H}$ es estable por $\mathfrak{h}_{(m)}$
$m = 1$, $[Y, H] = 0 \Rightarrow$

$$(H - \alpha(H).\mathrm{Id})^n Y(v) = Y(H - \alpha(H).\mathrm{Id})^n(v) = 0$$

Si $V_{\alpha,H}$ es $\mathfrak{h}_{(m-1)}$-estable

$$Y \in \mathfrak{h}_{(m)} \Rightarrow [H, Y] \in \mathfrak{h}_{(m-1)}$$

Como $[-, \rho(Y)]$ es una derivación del álgebra $\mathrm{End}(V)$, entonces

$$[A^N, Y] = \sum_{i+j=N-1} A^i [A, Y] A^j$$

en particular

$$[(H - \alpha(H)\mathrm{Id})^N, Y] =$$

$$= \sum_{i+j=N-1} (H - \alpha(H)\mathrm{Id})^i [(H - \alpha(H)\mathrm{Id}), Y] (H - \alpha(H)\mathrm{Id})^j$$

$$= \sum_{i+j=N-1} (H - \alpha(H)\mathrm{Id})^i [H, Y] (H - \alpha(H)\mathrm{Id})^j$$

Sea v es tal que $\left(H - \lambda(H)\mathrm{Id}\right)^n v = 0$.

$$(H-\lambda(H)\mathrm{Id})^N Yv = [(H-\lambda(H)\mathrm{Id})^N, Y]v + Y(H-\lambda(H)\mathrm{Id})^N v$$

$$= \sum_{i+j=N-1} (H-\alpha(H)\mathrm{Id})^i \overbrace{[H, Y]}^{\in\mathfrak{h}_{(m-1)}} (H-\alpha(H)\mathrm{Id})^j v$$

$$+Y\underbrace{(H-\lambda(H)\mathrm{Id})^N v}_{=0}$$

$$= \sum 0 + 0$$

Sea ahora $\{H_1, \ldots, H_n\}$ una base de $\mathfrak{h}$.
Para H_1, tenemos que

$$V = \bigoplus_i V_{\lambda_i^1, H_1}$$

(Jordan) reunidos los de mismo autovalor.
(En particular, la suma es directa.)
Cada $V_{\lambda_i^1, H_1}$ corresponde a un α_i tal que $\alpha_i(H_1) = \lambda_i^1$.

Como cada $V_{\alpha,H}$ es estable, podemos considerar H_2 actuando en cada $V_{\lambda_i^1, H_1}$. Tendremos

$$V_{\lambda_i^1, H_1} = \bigoplus_j (V_{\lambda_i^1, H_1})_{\lambda_j^2, H_2}$$

Cada sumando corresponde a un α tal que
$\alpha(H_1) = \lambda_j^1$, $\alpha(H_2) = \lambda_j^2$.
En n pasos se concluye la demostración (y quedan establecidos los valores de los α's en la base).

Proposición

Sea $\mathfrak{g}$ de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra nilpotente. Entonces

1. $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ *con Φ el conjunto de todos los pesos.*
2. *Si $\mathfrak{g}_0$ denota el subespacio correspondiente al peso cero, entonces $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$.*
3. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, *donde la inclusión se entiende por $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$ si $\alpha + \beta$ no es un peso generalizado.*

Demostración.

La primera parte es la proposición anterior. La segunda, como $\mathfrak{h}$ es nilpotente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ es nilpotente en $\mathfrak{h}$. Para la última, primero verifiquemos la fórmula

$$(\mathrm{ad}_H - (\alpha H + \beta H)\mathrm{Id})[X, Y] =$$

$$= [(\mathrm{ad}_H - \alpha H\mathrm{Id})X, Y] + [X, (\mathrm{ad}_H - \beta H\mathrm{Id})Y]$$

y por inducción

$$(\mathrm{ad}_H - (\alpha H + \beta H)\mathrm{Id})^n[X, Y] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(\mathrm{ad}_H - \alpha H\mathrm{Id})^k X, (\mathrm{ad}_H - \beta H\mathrm{Id})^{n-k} Y]$$

$\square$

Corolario

El espacio correspondiente al peso cero $\mathfrak{g}_0$ *es una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$*.*

Subálgebras de Cartan

Definición

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, una **subálgebra de Cartan** es una subálgebra nilpotente $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra cualquiera, se define el **normalizador** de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ como

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

Es claro que siempre vale

$$\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0$$

La primera inclusión es clara, la segunda es porque $\mathrm{ad}_H^n(X) = \mathrm{ad}_H^{n-1}([H, X])$ y $[H, X] \in \mathfrak{h}$.
La cualidad de ser de Cartan está regulada exactamente por el normalizador:

Proposición (Definición alternativa)

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *una subálgebra de Lie nilpotente de* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{h}$ *es de Cartan* $\Leftrightarrow \mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Siempre vale $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0$, si $\mathfrak{h}$ es de Cartan, la igualdad $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ fuerza $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Dem:

Supongamos ahora $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ pero $\mathfrak{h}$ no es de Cartan, es decir $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{h}$;

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ actúa por ad en el espacio no nulo $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{h}$ soluble $\overset{(teoLie)}{\Rightarrow}$ $\exists\ 0 \neq \overline{x}$ autovector $\forall H \in \mathfrak{h}$.

Pero $\overline{x} \in \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} \Rightarrow$ el autovalor debe ser cero.
$\Rightarrow \mathrm{ad}_H(\overline{x}) = 0$ módulo $\mathfrak{h}$
es decir, $x \in \mathfrak{g}_0 \setminus \mathfrak{h}$ verifica

$$[H, x] \in \mathfrak{h}, \forall H \in \mathfrak{h}$$

$\Rightarrow x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Absurdo, porque $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ por hipótesis.

Teorema

Toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una subálgebra de Cartan.

Introducimos la noción de elemento regular.

Sea V una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ y $x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} V_{0,x} &= \left\{v \in V : x^n v = 0 \text{ para } n \gg 0\right\} \\ &= \{v \in V : x^{\dim V} v = 0\} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

- $x = 0 \Rightarrow V_{0,x} = V$.
- si x actúa diagonal, sin autovalores nulos, $V_{0,x} = 0$.
- $V = \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}} \Rightarrow x \in \mathfrak{g}_{0,x}$. En este caso $\dim V_{0,x} \geq 1 \forall x$.

Consideremos

$$\ell_{\mathfrak{g}}(V) = \min_{x \in \mathfrak{g}} \dim V_{0,x};$$

como los valores $\dim V_{0,x}$ son discretos, ese mínimo es alcanzado por algún elemento; a estos elementos los denominaremos regulares:

Definición

$x \in \mathfrak{g}$ es regular con respecto a la representación V si

$$\dim V_{0,x} = \ell_{\mathfrak{g}}(V)$$

Denotemos por $R_{\mathfrak{g}}(V)$ al conjunto de elementos regulares.

Dada una representación, es claro que *existen elementos regulares* y, en particular, existen para la representación adjunta.

Teorema

$\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{g}$ *regular con respecto a* $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$

entonces

$$\boxed{\boxed{\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_{0,x}}}$$

es subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Dem:

Veamos $\mathfrak{g}_{0,x}$ es nilpotente.
Si $\mathfrak{g}_{0,x}$ no fuera nilpotente, $\mathfrak{g}_{0,x}$ no podría actuar nilpotentemente en sí misma por la adjunta, entonces el conjunto

$$\mathfrak{g}_{0,x} \supseteq Z = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : ([H,-]|_{\mathfrak{g}_{0,x}})^n \neq 0, n = \dim \mathfrak{g}_{0,x}\}$$

es no vacío; además, Z es Zariski abierto.
Consideremos a la vez "fuera" de $\mathfrak{g}_{0,x}$ el conjunto

$$\mathfrak{g}_{0,x} \supseteq W = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : [H,-] : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x}\}$$

también es un abierto Zariski, y no vacío, pues $x \in W$.
Concluímos que $Z \cap W \neq \emptyset$.

Si tomamos $y \in Z \cap W$ entonces

$$y \in W = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : [H, -] : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,x}\}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{g}_{0,y} \subseteq \mathfrak{g}_{0,x}$$

$$y \in Z = \{H \in \mathfrak{g}_{0,x} : ([H, -]|_{\mathfrak{g}_{0,x}})^n \neq 0, n = \dim \mathfrak{g}_{0,x}\}$$

$\Rightarrow \mathrm{ad}_y|_{g_{0,x}}$ no nilpo

$$y \in Z \cap W \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_{0,y} < \dim \mathfrak{g}_{0,x}$$

absurdo porque x es regular. $\therefore$ $\mathfrak{g}_{0,x}$ es nilpotente.

Sabiendo que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{0,x}$ es nilpotente, descomponemos $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$ en espacios de pesos generalizados

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha)$$

Es claro que $\mathfrak{g}_{0,x} \subseteq \mathfrak{g}_0$, pero a la vez

$$\mathfrak{g}_{0,x} \subseteq \mathfrak{g}_0 = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_{0,x}} \mathfrak{g}_{0,H} \subseteq \mathfrak{g}_{0,x}$$

por lo tanto, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,x}$.

Proposición

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *subálgebra de Cartan de una ss compleja, entonces* $\mathfrak{h}$ *es abeliana.*

Corolario

Misma hipótesis, $\Rightarrow \mathfrak{h}$ *es abeliana maximal.*

dem: la vez que viene

Teorema

Si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son dos subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, entonces existe un automorfismo interior $\psi \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}$ tal que $\psi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

(Ver por ej. [Knapp, pag 92])

Como corolario, todas las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ son isomorfas entre sí, en particular tienen la misma dimensión, que se denomina **rango** de $\mathfrak{g}$. Por ejemplo, el rango de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ es $n - 1$.