GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE
1ER CUATRIMESTRE 2021

Clase 9:

Subálgebra de Cartan y descomposición en pesos para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

$\mathfrak{h} := \mathrm{diag} \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Hecho

$\mathfrak{h}$ es subálgebra abeliana maximal.

dem: Sea A tal que $[A, h] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}$ y consideremos $h_0 = e_{11} - \frac{1}{n}\mathrm{Id}$. Notar

$$[A, h] = [A, e_{11}]$$

$$Ae_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots, \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{11}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [e_{11}, A] = 0 \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) \rightsquigarrow A \in \mathrm{diag}$$

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ es subalgebra, entonces

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$$

$H \in \mathrm{diag}$, $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

$$\mathrm{ad}_H(X) = [H, X] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

Hecho

las acciones ad_H se diagonalizan simultáneamente. Más aún, los E_{ij} son una base de autovectores simultaneos, pues si $H = \mathrm{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$, entonces

$$\mathrm{ad}_H(E_{ij}) = [\mathrm{diag}(h_1, \dots, h_n), E_{ij}]$$

$$= (h_i - h_j)E_{ij}$$

$$= \lambda_{ij}(H)E_{ij}$$

La forma de Killing en $\mathfrak{h}$

Si $\mathfrak{h}$ es abeliana, entonces $\kappa_{\mathfrak{h}} \equiv 0$, pero si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, se puede considerar $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ Para $H = \mathrm{diag}(h_, \ldots, h_n)$,

$$\mathrm{ad}_H^2(E_{ij}) = (h_i - h_j)^2 E_{ij}$$

y $\mathrm{ad}_H(\mathfrak{h}) = 0$, luego

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(H, H) = \sum_{i \neq j} (h_i - h_j)^2$$

Notar que $h_i = h_j, \forall i, j \Rightarrow H = c\mathrm{Id}$, pero $\mathrm{tr}(H) = 0$, luego eso no sucede (salvo $H = 0$).
$\mathfrak{h}_0 := \left\{(h_1, \ldots, h_n) : \sum_{i=1}^n h_i = 0, h_i \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathfrak{h}$ es una forma real de $\mathfrak{h}$,
$\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}_0\times\mathfrak{h}_0} \to \mathbb{R}$ es un verdadero producto interno.

Definición

$\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, V una representación, $\mu \in \mathfrak{h}^*$. El subespacio de peso μ de V es

$$V_\mu := \{v \in V : h \cdot v = \mu(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Observación:

$$h \cdot h' \cdot v = h \cdot (\lambda(h')v) = \lambda(h)\lambda(h')v = h' \cdot h \cdot v$$

$$\Rightarrow [h, h'] \cdot v = 0$$

$\Rightarrow$ V_μ es una representación de $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.
La definición de "subespacio de peso" tiene más sentido para álgebras de Lie abelianas.

Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, se define en particular

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x$$

Si $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_0$= los que conmutan con $\mathfrak{h}$, si $\mathfrak{h}$ es abeliana maximal, coincide con $\mathfrak{h}$.

Def.1

Una subálgebra de Cartan es una subálgebra abeliana maximal.

Si $\alpha \neq 0$, se dice que α es una raiz (root) si $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$.
Si $\mathfrak{h}$ es abeliana maximal y actua ad-diagonalizable en $\mathfrak{g}$, entonces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

Los pesos (ue aparecen) de $\mathfrak{g}^{ad}$ con respecto a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ se llaman raíces. Es decir, $0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^*$ es raíz si $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$.

Más aún, en el caso $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ tenemos

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \left(\oplus_{i<j} \mathbb{C}E_{ji} \right) \oplus \mathrm{diag} \oplus \left(\oplus_{i<j} \mathbb{C}E_{ij} \right)$$

$$[H, E_{ij}] = \lambda_{ij}(H)E_{ij}$$

$$[H, E_{ji}] = -[H, E_{ij}]$$

$\therefore \lambda_{ji} = -\lambda_{ij}$.

Es decir, $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \left(\oplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) \\ &= \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \end{aligned}$$

Claramente, el conjunto de draíces es finito. Además, si

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

entonces

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$$

si α, β, y $\alpha + \beta$ son raíces

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

si $\alpha, \beta \neq -\alpha$ son raíces pero $\alpha + \beta$ no es raíz $\Rightarrow$

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$$

dem:

$$[H, [x, y]] = [[H, x], y] + [x, [H, y]]$$

Ejemplo $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\kappa(H, H') = (a-b)(a'-b') \cdots = \sum_{i \neq j} \cdots$$

Killing fácil: con la traza usual?
Obs: En $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $b(M,N) = \mathrm{tr}(MN)$ verifica

$$\mathrm{tr}([M, M']N) = \mathrm{tr}(M[M', N])$$

$\therefore$ b es $\mathfrak{g}$-invariante.

Proposición

$\mathfrak{g}$ *simple compleja, entonces toda forma bilineal invariante es un múltiplo escalar de Killing*

dem: $(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cong \cdots$

Vuelta al ejemplo $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

$[H, E_{12}] = \alpha(H) E_{12}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} = a - b$$

$\exists H_\alpha \in \mathfrak{h} : \kappa(H, H_\alpha) = \alpha(H)$

idem β, $[H, E_{23}] = \beta(H) E_{23}$

$$\beta \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} = b - (-a-b) = 2b + a$$

ángulo entre α y β?

Vuelta al ejemplo $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

$$\alpha\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} = a-b$$

$\exists H_\alpha \in \mathfrak{h} : \kappa(H, H_\alpha) = \alpha(H)$. Busco h_α tal que

$$\mathrm{tr}(Hh_\alpha) = \alpha(H) = a-b$$

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a-b \checkmark$$

Vuelta al ejemplo $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

$$E_{12} \leftrightarrow a_1 - a_2 \leftrightarrow h_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{23} \leftrightarrow a_2 - a_3 \leftrightarrow h_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13} \leftrightarrow a_1 - a_3 \leftrightarrow h_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$