Grupos y Álgebras de Lie

1er cuatrimestre 2021

Grupos y Álgebras de Lie
1er cuatrimestre 2021

Esquema del curso:

Grupo de Lie $G \rightsquigarrow$ álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_1(G)$

$\rightsquigarrow$ álgebra lineal!

“Transformaciones infinitesimales”

Por ejemplo, si una rotación R es de la forma

$$R = \mathrm{Id} + \epsilon X + O(\epsilon^2)$$

con ϵ pequeño, la condición de isometría es

$$\langle v, w \rangle = \langle Rv, Rw \rangle = \langle (\mathrm{Id} + \epsilon X)v, (\mathrm{Id} + \epsilon X)w \rangle + O(\epsilon^2)$$

$$= \langle v, w \rangle + \epsilon \Big(\langle Xv, w \rangle + \langle v, Xw \rangle \Big) + O(\epsilon^2)$$

o bien

$$0 = \langle Xv, w \rangle + \langle v, Xw \rangle + O(\epsilon) \; \forall \epsilon$$

es decir, $\langle Xv, w \rangle + \langle v, Xw \rangle = 0 \; \forall v, w$

“Transformaciones infinitesimales”

$$\langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0, \ \forall v, w$$

$$\left((X)v^t\right)^t w^t + v(X)w^t = 0, \ \forall v, w$$

$$v(X)^t w^t + v(X)w^t = 0, \ \forall v, w$$

$$(X)^t = -X$$

El álgebra de Lie tangente al grupo ortononal consiste en las matrices antisimétricas.

“Transformaciones infinitesimales”

Si G actúa en un espacio W, y $f \in W$ es G-invariante:

$$R \cdot f = f$$

la condición para una “transformación infinitesimal” es

$$(\mathrm{Id} + \epsilon X) \cdot f = f + O(\epsilon^2) \ \forall \epsilon$$

$$\Leftrightarrow X \cdot f = 0 + O(\epsilon) \ \forall \epsilon$$

es decir,

$$\boxed{\boxed{X \cdot f = 0}}$$

Reducimos infinitas condiciones “$R \cdot f = f \forall R \in G$” a una cantidad finita

$$X \cdot f = 0 \forall X \in T_e G$$

(esta condicion -lineal- se chequea en una base de $T_e G$.)

Problemas:

1. Clasificación de los grupos de Lie G
2. Teoría de representaciones de G

Ambos se atacan vía $\mathfrak{g} = T_e G$.

Ejemplos clásicos:
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$,
$O(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$,
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$,
$SU(n)$,

Más ejemplos de grupos infinitos con parámetros reales?

$G \rightsquigarrow \mathfrak{g}$

Esquema del curso:

Grupo de Lie $G \rightsquigarrow$ álg. de Lie $\mathfrak{g} = T_1(G) \rightsquigarrow$ álgebra lineal!

$G \rightsquigarrow \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h}$

Si *Rep*(G) es s.s. el problema de clasificación se resuelve, vía subálgebras de Cartan (del complexificado)

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}i$$

(subálg. de Cartan $\mathfrak{h} \leftrightarrow$ subgrupos abelianos maximales)

Ej.: $\mathrm{SL}_n \rightsquigarrow \mathfrak{sl}_n$= mat. de traza cero $\rightsquigarrow \mathfrak{h}$= mat. diagonales.

Sus transformaciones infinitesimales asociadas $X \in \mathfrak{h}$ conmutan entre sí, se diagonalizan simultaneamente

$G \rightsquigarrow \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h} \rightsquigarrow \Phi$

autovalores $\rightsquigarrow$ noción de “pesos” en $\mathfrak{h}^*$
$\rightsquigarrow$ sist. de raíces Φ:

configuraciones muy especiales en el espacio euclídeo

$G \rightsquigarrow \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h} \rightsquigarrow \Phi \rightsquigarrow \Delta$

Sistema de raíces: configuraciones muy especiales en el espacio euclídeo, invariante por ciertas reflecciones "generadas" por raíces "simples" Δ

$G \rightsquigarrow \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h} \rightsquigarrow \Phi \rightsquigarrow \Delta \rightsquigarrow A, B, C, D, E, F, G$

geometría de las raíces simples (longitudes y ángulos)
$\rightsquigarrow$ combinatoria de un grafo: Diangrama de Dynkin

restricciones combinatorias del Diagrama de Dynkin
$\rightsquigarrow$ clasificación completa de posibles diagramas

Mirando los diagramas, se redescubren los ejemplos clásicos A_n, B_n, C_n, D_n

$$\begin{array}{ccll}
A_n & \leftrightarrow & \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C}) & (n \geq 1) \\
B_n & \leftrightarrow & \mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C}) & (n \geq 2) \\
C_n & \leftrightarrow & \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) & (n \geq 3) \\
D_n & \leftrightarrow & \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C}) & (n \geq 4)
\end{array}$$

+ $\boxed{\text{5 casos excepcionales}}$ F_4, G_2, E_6, E_7, E_8, En todas estas familias, “se entienden” las representaciones (de dimensión finita)