Caracteres

Fijamos $\mathfrak{g}$ ss compleja y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálgebra de Cartan.

Decimos que V es una representación de peso de $\mathfrak{g}$ si, como espacio vectorial (o como $\mathfrak{h}$-módulo)

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

donde $V_\lambda = \{v \in V : h \cdot v = \lambda(h)v\}$. Es decir, si los elementos de H actúan de manera diagonalizable. Por ejemplo, si V es de dimensión finita, entonces es de peso, o si está generada por un vector de peso máximo.

Si $\dim V_\lambda < \infty$ para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, se define la expresión formal

$$ch(V) := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\dim V_\lambda) e^\lambda$$

En particular, si $\dim V < \infty$, la suma anterior es finita. Se define -parcialmente- un producto, de la siguiente manera: Para sumas finitas, como la extensión bilineal de

$$e^\lambda e^\mu := e^{\lambda+\mu}$$

y para sumas formales, como

$$a \cdot b = \Big(\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} a_\lambda e^\lambda \Big) \Big(\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} b_\mu e^\mu \Big) := \sum_{\gamma \in \mathfrak{h}^*} (\sum_{\lambda+\mu=\gamma} a_\lambda b_\mu) e^\gamma$$

Este producto está definido para los pares tales que, para todo γ, la suma

$$\sum_{\lambda+\mu=\gamma} a_\lambda b_\mu$$

sea finita. Por ejemplo, si uno de los dos factores, a o b es una suma finita.

Caracteres en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y fórmula de Clebsch-Gordan

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}Y$, $\dim \mathfrak{h} = 1$, llamamos

$$q := e^\alpha, \qquad q^z := e^{z\alpha}, \qquad (z \in \mathbb{C})$$

donde $\alpha(H) = 1$.

1. Si V_m es la representación simple de peso $m \in \mathbb{N}_0$ (o equivalentemente la simple de dimensión $m+1$), compruebe que

$$\mathrm{ch}(V_m) = q^{-m} + q^{-m+2} + \cdots q^{m-2} + q^m = \frac{q^{m+1} - q^{-m-1}}{q - q^{-1}} \in \mathbb{C}[q^{\pm 1}]$$

es un polinomio de Laurent en q. Notar que si evaluamos $\mathrm{ch}(V_m)(q)$ en $q = 1$ obtenemos

$$\mathrm{ch}(V_m)(1) = \dim V_m$$

2. Si V y W son dos representaciónes de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ entonces

$$\mathrm{ch}(V \oplus W) = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(W)$$

(notar que si $S \subset V$ es subrepresentación $\Rightarrow \mathrm{ch}(V/S) = \mathrm{ch}(V) - \mathrm{ch}(S)$)

$$\mathrm{ch}(V \otimes W) = \mathrm{ch}(V) \cdot \mathrm{ch}(W)$$

3. $V = \oplus_i V_{m_i} \Rightarrow \mathrm{ch}V = \sum_i \mathrm{ch}(V_{m_i})$. La multiplicidad del V_m con m máximo coincide con el coeficiente de mayor grado en q. Si $\dim V < \infty$, concluir que si

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_i n_i \mathrm{ch}(V_{m_i})$$

con todos los $n_i > 0$, entonces necesariamente $V \cong \bigoplus_i n_i V_{m_i}$, donde la notación "$nW$" significa $\overbrace{W \oplus \cdots \oplus W}^{n-\ veces}$. *Sugerencia: demostrarlo por inducción en* $n := \sum_i n_i$.

4. Muestre que

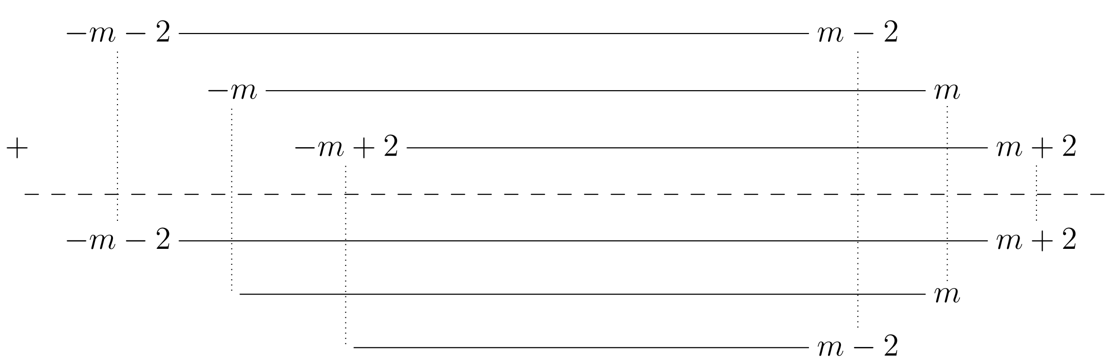
$$(q^{-m} + q^{-m+2} + \cdots + q^{m-2} + q^m)(q^{-1} + q) = \mathrm{ch}V_{m+1} + \mathrm{ch}V_{m-1}$$

Diagramáticamente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & q^{-m+1} & + q^{-m+2+1} & + q^{-m+4+1} + & \cdots & & + q^{m-4+1} & + q^{m-2+1} + & q^{m+1} \\
q^{-m-1} & + q^{-m+2-1} & + q^{-m+4-1} + & \cdots & & + q^{m-4-1} & + q^{m-2-1} & + q^{m-1} & \\
\hline
q^{-(m+1)} & + q^{-(m+1)-2} & + q^{-(m+1)-4} + & \cdots & + & \cdots & + q^{(m-1)-4} & + q^{(m-1)-2} + & q^{m-1} \\
 & + q^{-(m-1)} & + q^{-(m-1)+2} + & \cdots & + & \cdots & + q^{(m-1)-2} & + q^{m-1} &
\end{array}$$

5. Mostrar que

$$(q^{-m} + q^{-m+2} + \cdots + q^{m-2} + q^m)(q^{-2} + 1 + q^2) = \mathrm{ch}V_{m+2} + \mathrm{ch}V_m + \mathrm{ch}V_{m-2}$$



En general,

$$\mathrm{ch}V_m \cdot \mathrm{ch}V_n = \mathrm{ch}V_{m+n} + \mathrm{ch}V_{m+n-2} + \mathrm{ch}V_{m+n-4} + \cdots + \mathrm{ch}V_{m+n-2[(m+n)/2]}$$
$$= \sum_{k=0}^{[(m+n)/2]} \mathrm{ch}V_{m+n-2k}$$

concluir la *fórmula de Clebsch-Gordan:*

$$V_m \otimes V_n = \bigoplus_{k=0}^{[(m+n)/2]} V_{m+n-2k}$$

Algunas propiedades generales

6. Notar que $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{tr}(q^H|_V)$

7. Si V y W son dos representaciones de peso de $\mathfrak{g}$ tal que $\dim V_\mu$ y $\dim W_\mu$ son finitas para todo μ, entonces
$$\mathrm{ch}(V \oplus W) = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(W)$$
Muestre que $\dim(V \otimes W)_\mu < \infty$ para todo μ si y sólo si sus caracteres se pueden multiplicar, y en ese caso
$$\mathrm{ch}(V \otimes W) = \mathrm{ch}(V) \cdot \mathrm{ch}(W)$$

8. Si $V = \oplus_i n_i S_i$ con S_i simples, entonces
$$\mathrm{ch}V = \sum_i n_i \mathrm{ch}(S_i)$$
y además $n_i = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S_i, V) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, S_i)$

Caso $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

9. Denotamos $q_1 = e^{\alpha_1}$, $q_2 = e^{\alpha_2}$ donde α_1 y α_2 son la dos raíces simples "standard", es decir, a los correspondientes espacios raíz $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C}E_{12}$, $\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C}E_{23}$ con respecto a la subálgebra de Cartan dada por las matrices diagonales. Si V es una representación finita de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ muestre que
$$\mathrm{ch}(V) \in \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, q_2^{\pm 1}]$$
los polinomios de Laurent en 2 variables.

En general para $\mathfrak{g}$ semisimple, si $\dim V < \infty$ entonces $\mathrm{ch}(V) \in \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, \ldots, q_\ell^{\pm 1}]$ donde $\ell = \dim \mathfrak{h}$ es el rango de $\mathfrak{g}$. Notar
$$\dim V = \mathrm{ch}(V)(q_1 = 1, \ldots, q_\ell = 1)$$

q-enteros (volvemos a las aplicaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$)

Se define $[0]_q = 0$, $[1]_q = 1$, $[2]_q = 1+q$, $[3]_q = 1+q+q^2$, en general

$$[n]_q := \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

$$[-n]_q = -\sum_{i=0}^{n-1} q^{-i}$$

Notar que si evaluamos $q=1$ entonces $[n]_{q=1} = n$.

Se define $[n]_q!$ via

$$[0]_q! = 1,\ [1]_q! = 1,\ [2]_q! = [2]_q,\ [3]_q! = [2]_q[3]_q,$$

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q[3]_q \cdots [n]_q$$

y los combinatorios

$$\binom{a}{b}_q := \frac{[a]_q!}{[b]_q![a-b]_q!}$$

Mostrar que vale la "fórmula de Pascal"

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

10. Hecho (posible tema de final):

$$\mathrm{ch}(\Lambda^k V_m) = q^{\frac{k^2-(m+1)k}{2}} \binom{m+1}{k}_q$$

11. Muestre en general que si V y W son $\mathfrak{g}$-módulos, entonces el isomorfismo de "ordenar elemento" $\Lambda^k(V \oplus W) = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i V \otimes \Lambda^j W$ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Concluya fórmulas combinatorias para los q-combinatorios.