Representaciones (semi)simples - Lema de Schur y multiplicidades

Fijamos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo k.

Si V es una representación de $\mathfrak{g}$, diremos que es **simple** si $V \neq 0$ y las únicas subrepresentaciones son $\{0, V\}$.

Diremos que V es una representación **semimsimple** si es una suma directa de representaciones simples.

1. (Una versión del Lema de Schur) Sea V una representación y $f : V \to V$ un morfismo de representaciones. Muestre que si $0 \neq v_0 \in V$ es tal que $(v_0) = \lambda v_0$, entonces el subespacio $V_\lambda \subseteq V$ definido por

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

es una subrepresentación.

   a) Concluir que si V es simple, entonces $f = \lambda \mathrm{Id}$.

   b) Concluir que si $k = \mathbb{C}$, entonces para toda representación simple V vale que $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{C}\mathrm{Id}$.

2. (Otra versión del Lema de Schur) Sean V y W dos representaciones simples y $f : V \to W$ un morfismo de representaciones. Muestre que o bien $f = 0$ o bien f es un isomorfismo.

3. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{h}$ el producto directo de dos álgebras de Lie. Muestre que $\mathfrak{l} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathfrak{h}$ son dos ideales, y que por lo tanto, son dos sub-representaciones de $\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$.

   a) Sea $V = \mathfrak{g}^{\mathrm{ad}}$ y supongamos que $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie simples. Mostrar que esos ideales son representaciones simples de $\mathfrak{g}$.

   b) Esos ideales, no son isomorfos (como representaciones de $\mathfrak{g}$), ni siquiera en el caso en que $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{h}$ sean isomorfas como álgebras de Lie.

   c) Enunciar y demostrar lo análogo para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ con $\mathfrak{g}_i$ álgebras de Lie simples.

4. $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$ donde S_i es una representación simple y $S_i \ncong S_j \ \forall \neq j$, muestre que

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S_1) \times \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S_2) \times \cdots \times \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S_k)$$

   a) En particular, si el cuerpo de base es $\mathbb{C}$ y $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$, entonces

$$k = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V))$$

   de hecho, las proyecciones en cada coordenada forman una base.

b) Si ell cuerpo es $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ con $\mathfrak{g}_i$ álgebras simples, entonces

$$k = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\mathrm{ad}})) = \dim_{\mathbb{C}} \left\{ f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : [x, f(y)] = f([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{g} \right\}$$

5. Sea k un cuerpo, $\mathfrak{aff}_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$ y $V = k^2$ la representación de definición. Es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Mostrar que esta representación V NO es simple.
   b) Hacer la lista completa de todas las subrepresentaciones de V (hay sólo 3).
   c) Concluir de b) que V tampoco es suma directa de subrepresentaciones simples.