Grupos y álgebras de Lie 2021

Schur-Weyl duality

Sea G un grupo *finito*. Todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{C}$. Un espacio vectorial V se dice un G-módulo a izquierda si se tiene dada una acción

$$G \times V \to V$$

$$(g, v) \mapsto g \cdot v \in v$$

tal que $g \cdot -$ es lineal, $(gg') \cdot v = g \cdot (g' \cdot v)$ y $1_G \cdot v = v$. En oras palabras, si se tiene un morfismo de grupos

$$G \to \mathrm{GL}(U)$$

$$g \mapsto g \cdot -$$

Análogamente se define un G-módulo a *derecha* como un espacio vectorial U con una aplicación

$$U \times G \to U$$

$$(u, g) \mapsto u \cdot g$$

que verifique $- \cdot g$ es lineal, $u \cdot (gg') = (u \cdot g) \cdot g', \;\; u \cdot 1_G = u$.

Si U y V son G-módulos, el primero a derecha y el segundo a izquierda, se define

$$U \otimes_G W := \frac{U \otimes W}{\langle u \cdot g \otimes v - u \otimes g \cdot w \rangle}$$

donde g, u, v recorresn todos los elementos $g \in G, v \in V, w \in W$

1. Muestre que si V y V' son G-módulos, entonces $V \otimes V'$ y $\mathrm{Hom}(V, V')$ son G-módulos vía

$$g \cdot (v \otimes v') := gv \otimes gv'$$

$$(g \cdot f)(v) := g\Big(f(g^{-1}v)\Big)$$

2. Definimos $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) : f(gv) = gf(v) \forall v \in V, g \in G\}$ Observar $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \Big(\mathrm{Hom}(V, V')\Big)^G$ = los G-invariantes.

   Muestre que si V y V' son de dimensión finita, entonces

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') \cong V^* \otimes_G V'$$

   donde la acción derecha de G en V^* está dada por

$$(\phi \cdot g)(v) = \phi(gv)$$

3. (Lema de Schur) Sea S un G-módulo simple (i.e. $S \neq 0$ y los únicos subespacios G-estables son 0 y S). Notar que automáticamente S es de dimensión finita (porqué?). Muestre que $\mathrm{End}_G(S) = \mathrm{Hom}_G(S,S) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_S$. *Sugerencia: si $f : S \to S$ considere subespacio de autovectores.*

4. Sean S_1 y S_2 dos G-módulo simples. Muestre que o bien $\mathrm{Hom}_G(S_1, S_2) = 0$, o bien $S_1 \cong S_2$ (y en ese caso, existe un único isomorfismo a menos de múltiplo escalar).

5. Muestre que si V es un G-módulo de dimensión finita, entonces admite un producto interno G-invariante (o sea, los elementos de g actúan por isometrías). *Sugerencia: si $(-,-)$ es un producto interno dado en V, muestre que*

$$((v,v')) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gv, gv')$$

es también un producto interno y es G-invariante.

6. Concluir que si S es un subespacio G-estable de V, entonces S se complementa por un subespacio estable. *Sugerencia: considere $S^{\perp}$.*

7. (Teorema de Maschke) Concluya que todo G-módulo V de dimensión finita se descompone como suma directa de simples.

8. Sea $A = M_n(\mathbb{C})$ y $V = \mathbb{C}^n$, que lo vemos como un A-módulo con la multiplicación matricial usual. Muestre que si $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, entonces el menor subespacio que es $M_n(\mathbb{C})$-estable (o sea, el A-submódulo generado por v) coincide con $\mathbb{C}^n$. En otras palabras, M es un A-módulo simple.

9. Sea W un G-módulo de dimensión finita, luego (Maschke) $W \cong \bigoplus_{i=1}^k S_i^{m_i}$ para (únicos a menos de permutación de índices) simples S_i, y enteros m_i, donde $S^m = S \oplus \cdots \oplus S$ m-veces. Muestre que

$$\mathrm{End}_G(W) \cong M_{m_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{m_k}(\mathbb{C})$$

   [Lema 1] Sea U un G-módulo *a derecha* y $B := \mathrm{End}_G(U)$, por lo que U es (simultáneamente) un B-módulo a izquierda. Mostraremos que si V es un G-módulo a izquierda simple, entonces

$$U \otimes_G V$$

   es B-simple (o cero), donde la estructura de B-módulo a izquierda está dada por

$$f \cdot (u \otimes v) := f(u) \otimes w, \qquad \forall f \in \mathrm{End}_G(U), u \in U, v \in V$$

   dem: Por Maschke (versión derecha), $U = \bigoplus_i S_i^{m_i}$, luego (ver Ejercicio 10)

$$U \otimes_G V = \big(\bigoplus_i S_i^{m_i}\big) \otimes_G V \cong \bigoplus_i (S_i \otimes_G V)^{m_i}$$

Ahora para cada i,

$$S_i \otimes_G V \cong \mathrm{Hom}_G(S_i^*, V)$$

es cero si $S_i^* \not\cong V$ y de dimensión 1 si $S_i^* \cong V$.

Si ningún $S_i^* \cong V$ entonces $U \otimes_G V = 0$, si no, $V \cong S_{i_0}^*$ y

$$U \otimes_G V \cong \mathbb{C}^{m_{i_0}}$$

concluya por el ejercico 9 que es $\mathrm{End}_G(U)$-simple

[Schur-Weyl 0] Sea $d \in \mathbb{N}$, $V^{\otimes d}$ y $G = S_d$. Notar que la acción de $\mathrm{GL}(V)$ dada por

$$f \cdot (v_1 \otimes v_\otimes \cdot \otimes v_n) := f(v_1) \otimes f(v_2) \otimes \cdot \otimes f(v_n))$$

conmuta con la accón de S_n, por lo tanto un subespacio S_n-estable es necesariamente $\mathrm{GL}(V)$-estable.

[Schur-Weyl 1] Sea $d \in \mathbb{N}$, $U = V^{\otimes d}$ y $G = S_d$. Entonces, los subespacios $V^{\otimes d}$ que son $\mathrm{GL}(V)$-estables son S_n-estables.

dem: Muestre (usando una base de V y su base dual) que

$$\mathrm{End}(V^{\otimes d}) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d}) \cong (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} \cong (V^* \otimes V) \otimes \cdots \cdot (V^* \otimes V) \cong \mathrm{End}(V)^{\otimes d}$$

y que bajo esa acción

$$\mathrm{End}_S(V^{\otimes d}) \cong \mathrm{Sym}^d(\mathrm{End}(V))$$

donde $\mathrm{Sym}^d W$ = los tensores completamente simétricos, como subespacio de $W^{\otimes d}$.

Consideramos la función (no lineal! pero continua)

$$\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}_{S_d}(V^{\otimes d})$$

$$f \mapsto f \otimes f \otimes \cdots \otimes f$$

Muestre que la imagen de esta aplicación genera (como espacio vectorial) a

$$\mathrm{Sym}^d(\mathrm{End}(V)) = \mathrm{End}_{S_d}(V^{\otimes d})$$

Concluya el enunciado a partir de que $\mathrm{GL}(V)$ es denso en $\mathrm{End}(V)$.

[Schur-Weyl 2] $d \in \mathbb{N}$, $G = S_d$, $U = V^{\otimes d}$. Si V^λ es una representación irreducible de S_d (están parametrizadas por particiones λ de d), entonces el "polinomio de Schur"

$$S^\lambda(V) := V^{\otimes d} \otimes_{S_d} V^\lambda$$

es $\mathrm{End}_{S_d}(V^{\otimes d})$-módulo simple, y por lo tanto un $\mathrm{GL}(V)$-módulo simple.

10. Sea A un anillo, M un A-módulo a derecha y N un A-módulo a izquierda. Se define

$$M \otimes_A N := \frac{M \otimes N}{\langle ma \otimes n - m \otimes an \rangle}$$

Denotamos $m \otimes_A n = \overline{m \otimes n}$.

- En caso $A = \mathbb{C}[G] = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}g$, el álgebra de grupo, $M \otimes_A N = M \otimes_G N$.
- Muestre que en el caso particular para $N = A$ se tiene

$$M \otimes_A A \cong M$$

$$m \otimes_A a \mapsto ma$$

$$m \otimes_A 1 \leftarrow\!\shortmid m$$

- Si $N = \bigoplus_i N_i$ como A-módulo a izquierda, entonces

$$M \otimes_A (\bigoplus_i N_i) \cong \bigoplus_i (M \otimes_A N_i)$$

[Schur-Weyl 3] $d \in \mathbb{N}$, $G = S_d$, $V^{\otimes d}$. Si

$$\mathbb{C}[S_d] = \bigoplus (V^{\lambda})^{m\lambda}$$

es la descomposición en simples -con sus multiplicidades- parametrizados por λ, entonces, la descomposición en simples de $V^{\otimes d}$ como $\mathrm{GL}(V)$-módulo es

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda} S^{\lambda}(V)^{m_\lambda}$$

dem: usamos

$$V^{\otimes d} \cong V^{\otimes d} \otimes_{S_d} \mathbb{C}[S_d]$$

y los resultados previos.

11. Ejemplo $d = 2$. $S_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ con $\tau^2 = \mathrm{Id}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[S_2] & \cong & \mathbb{C}[t]/(t^2-1) & \cong & \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus sgn \\ \tau & \mapsto & t & \mapsto & (1,-1) \end{array}$$

donde $\mathbb{C}$ se la considera como representación trivial.

$$\Rightarrow V^{\otimes 2} = (V^{\otimes 2} \otimes_{S_2} \mathbb{C}) \ \oplus \ (V^{\otimes 2} \otimes_{S_2} sgn) = Sym^2(V) \oplus Alt^2(V)$$

es *la* descomposición como $\mathrm{GL}(V)$-módulos simples.

12. Consideremos los siguientes elementos de $\mathbb{C}[S_n]$:

$$e_+ := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma, \qquad e_- := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\sigma$$

muestre que

$$e_+\tau = e_+ = \tau e_+, \qquad e_-\tau = (-1)^\sigma e_- = \tau e_-, \ \forall \tau \in S_n$$

$$e_+^2 = e_+, \quad e_-^2 = e_-, \quad e_+e_- = 0 = e_-e_+^2$$

Es decir, son idempotentes "ortogonales" que conmutan. Llamemos $e := 1 - e_+ - e_-$. Muestre que

$$e\tau = \tau e \ \forall \tau \in S_n$$

$$e^2 = e, \ ee_+ = ee_- = 0$$

Escribiendo $1 = e_+ + e_+ + e$, muestre la siguiente descomposición

$$\mathbb{C}[S_n] = e_+\mathbb{C}[S_n] \oplus e_-\mathbb{C}[S_n] \oplus e\mathbb{C}[S_n]$$

$$\mathbb{C}[S_n] = e_+\mathbb{C}[S_n]e_+ \oplus e_-\mathbb{C}[S_n]_- \oplus e\mathbb{C}[S_n]e = \mathbb{C}e_+ \times \mathbb{C}e_- \times e\mathbb{C}[S_n]$$

(en la ultima igualdad, el simbolo $\times$ en lugar de $\oplus$ se usa sólo para enfatizar que el producto es coordenada a coordenada).

13. $d = 2$: $\mathbb{C}[S_2] = \mathbb{C}e_+ \times \mathbb{C}e_-$.

14. Deducir del ejercicio 9, con $W = \mathbb{C}[S_n]$, que

$$\mathbb{C}[S_n] \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{n_k}(\mathbb{C})$$

y tomando dimensiones $n! = \sum_i n_i^2$.

15. $d = 3$: $\mathbb{C}[S_3] = \mathbb{C}e_+ \times \mathbb{C}e_- \oplus e\mathbb{C}[S_3]$. Como S_3 es no-conmutativo, no puede ser

$$\mathbb{C}[S_n] \ncong M_1(\mathbb{C}) \times \cdots M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

con todos los $n_i = 1$, por lo tanto alguno de los n_i es ≥ 2. Como $3! = 6 = 4 + 2$, necesariamente

$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$$

es la única posibilidad y

$$\mathbb{C}[S_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$$

Concluya que existen solamente 3 simples no isomorfos entre sí en $\mathbb{C}[S_3]$, a saber: $\mathbb{C} = e\mathbb{C}[S_3]$ (la trivial), $sgn = e_-\mathbb{C}[S_3]$ y "la otra", que aparece dos veces (para dar $M_2(\mathbb{C})$) y que es necesariamente de dimensión 2 (pues S^2 es de dimensión

$4 = \dim M_2(\mathbb{C})$). Concluir que par cualquier espacio vectorial de dimensión finita V, la descomposición de $V^{\otimes 3}$ como $\mathrm{GL}(V)$-módulo es

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus Alt^3(V) \oplus la\ otra$$

donde *"la otra"* es una suma directa de dos copias isomorfas entre sí (y no isomorfas ni a la simétrica ni la antismétrica). El proyector en la componente *la otra* está dada por $e = \mathrm{Id} - e_+ - e_-$.

[Weyl's Unitary trick] (más "involved" en la topología) Sea $f : M_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una función polinomial. Muestre que si $f|_{U(d)} \equiv 0$ entonces $f \equiv 0$.

- Concluya que $U(d)$ es Zariski-denso en $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$.
- Sea W un $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-módulo de dimensión finita. En particular, W es un $U(d)$-módulo. Muestrar que $S \subset W$ es un subespacio $GL(d, \mathbb{C})$-estable si y sólo si es $U(d)$-estable.

  Concluya que en la dualidad de Schur-Weyl se puede intercambiar $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ por $U(d)$.